கணிதம்

தரம் 11

பகுதி II

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

சகல பாடநூல்களையும் இலத்திரனியல் ஊடாகப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு
www.edupub.gov.lk வலைத்தளத்தை நாடுங்கள்.

முதலாம் பதிப்பு - 2015
இரண்டாம் பதிப்பு - 2016
மூன்றாம் பதிப்பு - 2017
நான்காம் பதிப்பு - 2018
ஐந்தாம் பதிப்பு - 2019
ஆறாம் பதிப்பு - 2020

எல்லா உரிமையும் இலங்கை அரசினர்க்கே.

ISBN 978-955-25-0307-8

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
அரசாங்க அச்சகக் கூட்டுத்தாபனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by: Educational Publications Department
Printed by: State Printing Corporation

தேசிய கீதம்

சிறீ லங்கா தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நல்லெழில் பொலி சீரணி
நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா
ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்
நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா
நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்
நமதுதி ஏல் தாயே
நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே
நமதுயிரே தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதாரருள் ஆனாய்
நவை தவிர் உணர்வானாய்
நமதேர் வலியானாய்
நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்
நமதிளமையை நாட்டே
நகு மடி தனையோட்டே
அமைவுறும் அறிவுடனே
அடல்செறி துணிவருளே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதார் ஒளி வளமே
நறிய மலர் என நிலவும் தாயே
யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த
எழில்கொள் சேய்கள் எனவே
இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே
இழிவென நீக்கிடுவோம்
ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி
நமோ நமோ தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழும் இல்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ.

ஆனந்த சமரக்கோன்
கவிதையின் பெயர்ப்பு.

முன்னுரை

உலகம் நாளுக்கு நாள் விருத்தி அடைந்து செல்கின்றது. அதற்கேற்பக் கல்வித் துறையும் எப்போதும் புதுப்பொழிவு பெறுகின்றது. அதனால், எதிர்காலச் சவால்களுக்குச் சிறப்பாக முகங்கொடுக்க முடியுமான மாணவர் சமுதாயமொன்றை உருவாக்க வேண்டுமாயின், எமது கற்றல் கற்பித்தல் செயற்பாடுகளும் வினைத்திறன் மிக்கதாக அமைய வேண்டும். அதற்கு வலுவூட்டி நவீன உலக அறிவை வழங்கும் அதேவேளை உலகிற்கு நற்பண்புகள் நிறைந்த பிரசைகளை உருவாக்குவதற்கு உதவுவதும் எமது பொறுப்பாகும். தேசத்தின் பிள்ளைகளின் அறிவுத் தீபத்தை ஏற்றும் உன்னத நோக்கத்துடன் எமது திணைக்களம் கற்றல் சாதனங்களை உருவாக்கும் செயற்பாட்டில் செயலூக்கத்துடன் ஈடுபட்டு அதற்குப் பங்களிப்பு வழங்குகின்றது.

பாடநூல்கள் அறிவு நிறைந்த களஞ்சியங்களாகும். அவை சில வேளைகளில் எங்களை இரசனை உலகிற்கு அழைத்து செல்வதுடன் தர்க்கரீதியாகச் சிந்திக்கும் ஆற்றலையும் வளர்க்கின்றது. மறைந்துள்ள ஆற்றல்களை வெளிக்கொணர்கின்றது. எதிர்காலத்தில் எப்போதாவது, இந்தப் பாடநூல்கள் தொடர்பான சில ஞாபகங்களை மீட்கும்போது அவை உங்கள் மனதுக்கு இதமானதாக அமையும். இந்தப் பெறுமதி வாய்ந்த கற்றல் சாதனத்தின் மூலம் சிறந்த பயன்பெறும் அதேவேளை மேன்மேலும் சிறந்த அறிவு மூலங்களை நெருங்குவதும் உங்களுக்குப் பயனுள்ளதாக அமையும். இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களுக்கு இலவசமாக வழங்கப்படுகின்றது. பாடநூல்களுக்காக அரசாங்கம் செலவிட்டுள்ள பெருந் தொகைப் பணத்திற்கு, உங்களால் மாத்திரமே பெறுமதி சேர்க்க முடியும். இப்பாடநூலை சிறப்பாகப் பயன்படுத்தி சிறந்த அறிவும் பண்பாடும் கொண்ட பிரசைகளாகி நாளைய உலகிற்கு ஒளியூட்டுவதற்கு உங்கள் அனைவருக்கும் ஆற்றலும் தைரியமும் கிடைக்க வேண்டுமென்று வாழ்த்துகின்றேன்.

இப்பாடநூலை உருவாக்குவதில் அளப்பரிய பங்களிப்பு வழங்கிய எழுத்தாளர் மற்றும் பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தின் உத்தியோகத்தர்கள் அனைவருக்கும் எனது மனமார்ந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

பீ. என். அயிலப்பெரும
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல
2020. 06. 26

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

பீ. என். அயிலப்பெரும - கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி - ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

அ. குலரத்தினம் - பிரதி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர் குழு

கலாநிதி ரோசன மீகஸ்டும்புர - சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்
பேராதெனியப் பல்கலைக்கழகம்.

கலாநிதி ஜே. கே. ரத்னாயக்கா - சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்
இலங்கை தொடர்பாடல் தொழினுட்ப நிறுவகம்.

என். வாகீசமூர்த்தி - பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)

ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன் - உதவிப் பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)
வலயக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.

வி. முரளி - விரிவுரையாளர்
ஆசிரியர் மத்திய நிலையம்,
வவுனியா வடக்கு.

எச். எம். ஜயசேன - ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட.

வி. வி. ஆர். விதாரம - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை,
தெகியோவிட்ட.

டபிள்யூ. எம். டபிள்யூ. சீ. வலிசிங்க - உதவிப் பணிப்பாளர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.

அஜித் ரணசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர்
வலயக் கல்விப் பணிமனை, கேகாலை.

வீ. எம். பி. லால் விஜயகாந்த - ஆசிரிய ஆலோசகர்
சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.

அனுர வீரசிங்க - ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

எச். ஏ. பீ. தர்மரத்ன - ஆசிரிய சேவை
ஸ்ரீமாவோ பண்டாரநாயக்க வித்தியாலயம்,
கொழும்பு.

பதிப்பாசிரியர் குழு

கலாநிதி ரோமைன் ஜயவர்த்தன	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கணிதத்துறை, கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி பீ. கே. மல்லவ ஆராச்சி	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி த. ஶ்ரீதரன்	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.*
சித்தானந்த வியாங்வெல	- *பணிப்பாளர்* *கணிதக் கிளை, கல்வி அமைச்சு.*
பீ. ஜெகத்குமார	- *சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்* *கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.*
அ. குலரத்தினம்	- *பிரதி ஆணையாளர்* *கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*
தனுஜா மைத்திரி விதாரண	- *உதவி ஆணையாளர்* *கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

மொழி பதிப்பாசிரியர்

பீ. ராஜசேகரன் - *பணிப்பாளர் (ஓய்வு நிலை)*

சரவை பார்ப்பு

கே. கருணேஸ்வரன் - *ஆசிரிய ஆலோசகர்*
வலயக் கல்விப் பணிமனை, கொழும்பு.

கணினி வடிவமைப்பு

முத்தையா காந்தரூபன் - *கணினி வடிவமைப்பாளர்*
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

உள்ளடக்கம்

		பக்கம்
9.	சதவீதம்	1
10.	பங்குச்சந்தை	13
11.	நடுப்புள்ளித் தேற்றம்	26
12.	வரைபுகள்	39
13.	சமன்பாடுகள்	63
14.	இயல்பொத்த முக்கோணிகள்	82
15.	தரவுகளை வகைகுறித்தல்	109
16.	பெருக்கல் விருத்தி	134
	மீட்டற் பயிற்சி	150

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 11 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாயத்தின் தொடக்கத் திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 11 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாயத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசி கூறுகின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

9 சதவீதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் கடன் தவணைத் தொகைகளைக் கணிப்பதற்கும்
- குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் வட்டி வீதத்தைக் கணிப்பதற்கும்
- கூட்டு வட்டி தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சதவீதங்கள் தொடர்பாக நீங்கள் இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பெறுமானம் காண்க.

a. ரூ. 800 இன் 12% **b.** 1 கிலோமீற்றரின் 8%
c. 1200 கிராமின் 2.5% **d.** 2.5 லீற்றரின் 25%

2. ரூ. 500 இற்கு வாங்கிய ஒரு கைக்கடிகாரத்தை ரூ. 600 இற்கு விற்கும் ஒரு வர்த்தகருக்குக் கிடைக்கும் இலாபச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

3. ரூ. 8 000 ஐ 6% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்திற்குக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் ஓர் ஆண்டிற்காகச் செலுத்த வேண்டிய வட்டியைக் கணிக்க.

4. ரூ. 5 000 ஐ 10% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் 2 ஆண்டுகளுக்கு பின்னர் செலுத்த நேரிடும் மொத்த வட்டியைக் கணிக்க.

5. 2% மாத எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ. 10 000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற மோகன் 3 மாதங்களுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

அறிமுகம்

நாம் தினசரி வாழ்வில் செய்யும் செலவுகளை மீண்டெழும் செலவுகள், மூலதனச் செலவுகள் என இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். மறுபடியும் நேரிடும் செலவுகள் மீண்டெழும் செலவுகள் எனப்படும். உதாரணங்களாக உணவு, உடை, மருந்து, மின் சிட்டைக் கொடுப்பனவுகளுக்காகச் செய்யப்படும் செலவுகளை மீண்டெழும் செலவுகளுக்காகக் காட்டலாம்.

மீண்டும் மீண்டும் தாங்க நேரிடாத செலவுகள் மூலதனச் செலவுகள் எனப்படும். உதாரணமாக நாம் காணி, வீடு, வாகனம், பொறித்தொகுதி, தளபாடம் ஆகியவற்றைக் கொள்வனவு செய்வதற்காகச் செய்யப்படும் செலவுகளை மூலதனச் செலவுகளாகக் காட்டலாம். அத்தகைய செலவுகள் அளவில் பெரியன ஆகையால் அதற்காகத் தேவையான பணத்தைப் பல சந்தர்ப்பங்களில் நிதி நிறுவகமொன்றிலிருந்து அல்லது பணியாற்றும் சேவை நிலையத்திலிருந்து கடனாகப் பெறுதல் நேரிடுகின்றது.

அவ்வாறு பெறும் கடனை ஒரே தடவையில் திரும்பச் செலுத்தல் பொதுவாக நடைபெறாத அதே வேளை நெடுங்காலத்தில் மாதந்தோறும் பகுதிகளாகச் செலுத்தல் நடைபெறுகின்றது. மேலும் அத்தகைய கடனைப் பெறும்போது கடனுக்கு மேலதிகமாக வட்டியைச் செலுத்த நேரிடுகின்றது. மாதந்தோறும் செலுத்த நேரிடும் கடன் பகுதியும் வட்டியும் சேர்ந்து கடன் தவணைத்தொகை எனப்படும்.

எனினும் சில நிறுவகங்கள் தமது நிறுவகத்தின் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்படும் அல்லது கொண்டு வந்து விநியோகிக்கப்படும் பொருள்களின் சந்தைப்படுத்தலைக் கூட்டுவதற்கு வட்டி இல்லாத கடனை மாத்திரம் தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்தத்தக்கதாகப் பொருள்கள் விற்பனை செய்யப்படும் சந்தர்ப்பங்களையும் காணலாம்.

உதாரணம் 1

தளவாட உற்பத்திக் கம்பனி ஒன்றின் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்படும் ரூ. 30 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு மர அலுமாரி வட்டி இல்லாத 12 மாதத் தவணைத் தொகைகளில் செலுத்தும் நிபந்தனை மீது விற்பனை செய்யப்படுகின்றது. மாதந்தோறும் செலுத்த வேண்டிய கடன் தவணைத்தொகை யாது?

ஒரு கடன் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. $\frac{30\ 000}{12}$

= ரூ. 2 500

உதாரணம் 2

ஓர் அரசாங்க நிறுவகத்தில் பணியாற்றும் ஒருவருக்கு விழா முற்பணமாக ரூ. 5 000 வழங்கப்படும் அதே வேளை அப்பணம் வட்டி இல்லாமல் 10 மாதத் தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்தி முடிக்கப்பட வேண்டும். அப்பணம் மாதந்தோறும் சம்பளத்திலிருந்து கழிக்கப்படுமெனின், மாதந்தோறும் சம்பளத்திலிருந்து கழிக்கப் படும் பணம் யாது?

மாதந்தோறும் சம்பளத்திலிருந்து கழிக்கப்படும் பணம் $=$ ரூ. $\dfrac{5\ 000}{10}$

$=$ ரூ. 500

9.1 குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டியைக் கணித்தல்

வட்டி அறவிடப்படும் சந்தர்ப்பங்களில் வட்டியைக் கணிக்கும் முறைகள் பல்வேறு வகைப்படும். குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டியைக் கணித்தல் மிகவும் பொதுவான முறையாகும். அதனைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

மாதத் தவணைத்தொகைகளாகத் திரும்பச் செலுத்துவதற்கு ஒரு குறித்த நிறுவகத்திலிருந்து கடனைப் பெறும்போது அல்லது ஒரு பொருளின் பெறுமானத்தில் ஒரு பகுதியைப் பணமாகச் செலுத்தி மீதிப் பணத்தை மாதத் தவணைத்தொகைகளின் மூலம் திரும்பச் செலுத்துவதன் பேரில் பொருள்களை வாங்கும்போது பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் கடனுக்கு மேலதிகமாக வட்டியும் செலுத்த நேரிடுகின்றது.

இம்முறையின் கீழ் ஒவ்வொரு மாதத்திலும் கடனின் ஒரு பகுதி செலுத்தப்படுகின்றது. செலுத்தப்படவுள்ள கடனுக்காக வட்டி கணிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே செலுத்துவதற்கு உள்ள கடன் மாதந்தோறும் குறைகின்றமையால் வட்டி மாதந்தோறும் கணிக்கப்படுதல் குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டியைக் கணித்தல் எனப்படும். இவ்வாறு கணித்த பின்னர் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரே தொகைப் பணத்தைத் தவணைப் பணமாகச் செலுத்தக்கூடியவாறு மாதத் தவணைப் பெறுமானம் பெறப்படும்.

குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் வட்டி கணிக்கப்படும் விதத்தையும் மாதத் தவணைப் பெறுமானத்தை அறியும் முறையையும் விளங்கிக் கொள்வதற்குப் பின்வரும் உதாரணங்களைப் பரிசீலியுங்கள்.

உதாரணம் 1

திரு சேகர் 24% ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படும் ஒரு வங்கியிலிருந்து ஒரு வியாபாரக் கடனாக ரூ. 30 000 பணத்தைப் பெற்றுள்ளார். அக்கடனை 6 சமனான மாதத் தவணைத்தொகைகளில் செலுத்தி முடிக்க வேண்டிய அதே வேளை குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் வட்டி அறவிடப்படுமெனின், அவர் செலுத்த வேண்டிய ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பெற்றுள்ள கடன் = ரூ. 30 000

வட்டியில்லாத ஒரு கடன் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. $\frac{30\,000}{6}$

= ரூ. 5 000

இம்முறைக்கு ஒவ்வொரு மாதத்திலும் கடன் மீதி ரூ. 5000 வீதம் குறையும் அதே வேளை வட்டி எஞ்சியிருக்கும் கடன் தொகைக்கு அறவிடப்படுகின்றது.

அறவிடப்படும் ஆண்டு வட்டி வீதம் = 24%

அதற்கேற்ப மாத வட்டி வீதம் = 2%

முதல் மாதத்திற்கான வட்டி = ரூ. $30\,000 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 600

இரண்டாம் மாதத்திற்கான வட்டி = $25\,000 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 500

மூன்றாம் மாதத்திற்கான வட்டி = $20\,000 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 400

நான்காம் மாதத்திற்கான வட்டி = $15\,000 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 300

ஐந்தாம் மாதத்திற்கான வட்டி = $10\,000 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 200

ஆறாம் மாதத்திற்கான வட்டி = $5\,000 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 100

இதற்கேற்பச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. (600 + 500 + 400 + 300 + 200 + 100)

= ரூ. 2 100

அப்போது செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. (30 000 + 2 100)

= ரூ. 32 100

∴ ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் = ரூ. (32 100 ÷ 6)

= ரூ. 5 350

மேலே காட்டப்பட்டுள்ள முறையில் வட்டியைக் கணிப்பின் நீண்ட முறையும் அதிக காலமும் செலவிடப்படுகின்றது. ஆகவே எளிதாக வட்டியைக் கணிப்பதற்குப் பின்வரும் முறையியலைப் பார்ப்போம்.

ஒரு மாதத்தில் செலுத்த வேண்டிய ஒரு கடன் பகுதிக்கு வட்டி = ரூ. $5\,000 \times \frac{2}{100}$
= ரூ. 100

இதற்கேற்பச்

செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. $100 \times 6 + 100 \times 5 + 100 \times 4 + 100 \times 3 + 100 \times 2 + 100 \times 1$
= ரூ. $100\,(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$
= ரூ. 100×21
= ரூ. 2 100

இங்கு 21 ஆனது 6 மாதங்களில் செலுத்துவதற்கு எஞ்சியுள்ள கடன் பகுதிகளின் (ரூ.5000 பகுதிகளின்) மொத்தம் ஆகும். அது மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை எனப்படும். இதற்கேற்ப

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

அப்பெறுமானங்களை ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாகக் கருதும்போது அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைச் சூத்திரம் $\frac{n}{2}(a + l)$ இன் மூலமும் கணிக்கலாம்.

அப்போது மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{6}{2}(6 + 1)$
$= 3 \times 7$
$= 21$

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $\dfrac{\text{தவணைத்தொகைகளின் எண்ணிக்கை} \times (\text{தவணைத்தொகைகளின் எண்ணிக்கை} + 1)}{2}$

இன் மூலம் பெறலாம்.

இதற்கேற்பக் கடன் செலுத்தப்பட வேண்டிய மாதத் தவணைத்தொகைகளின் எண்ணிக்கை n எனின்,

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $\frac{n}{2}(n + 1)$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

உடன் காசுக்கு ரூ.25000 ஆகவுள்ள ஒரு தொலைக்காட்சியொன்றைத் தொடக்கத்தில் ரூ.7000 ஐயும் மீதியை ஓர் ஆண்டில் சமனான மாதத் தவணைத்தொகைகளின் மூலமும் செலுத்திப் பெறலாம். கடனுக்காகக் குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் 18% செலுத்தவேண்டிய ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படுமெனின் ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையைக் கணிக்க.

தொலைக்காட்சியின் பெறுமானம் = ரூ. 25 000

முதலில் செலுத்த வேண்டிய பணம் = ரூ. 7 000

$\therefore$ செலுத்துவதற்கு உள்ள கடன் = ரூ. 25 000 – 7 000

= ரூ.18 000

கடன் செலுத்தப்பட வேண்டிய காலம் = 12 மாதம்

$\therefore$ ஒரு மாதத்தில் செலுத்த வேண்டிய கடன் பகுதி = ரூ. 18 000 ÷ 12

= ரூ. 1 500

ஒரு மாத அலகிற்கு வட்டி = ரூ. $1500 \times \frac{18}{100} \times \frac{1}{12}$

= ரூ. 22.50

வட்டி செலுத்தப்பட வேண்டிய மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $\frac{12}{2}(12 + 1)$

$= 6 \times 13$

$= 78$

$\therefore$ செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. 22.50×78

= ரூ. 1 755

$\therefore$ செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. 18 000 + 1 755

= ரூ. 19 755

$\therefore$ ஒரு மாதத் தவணைத் தொகை = ரூ. 19 755 ÷ 12

= ரூ. 1 646.25

உதாரணம் 3

ஒரு கடையில் காணப்பட்ட அறிவித்தல் பலகையிலிருந்து பெயர்த்தெடுத்த ஒரு பகுதி கீழே காணப்படுகின்றது.

ரூ. 30 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு சலவை இயந்திரத்தைத் தொடக்கத்தில் ரூ. 5 000 ஐயும் மீதியை ரூ. 2720 வீதம் 10 சமனான மாதத் தவணைத் தொகைகளாகவும் செலுத்திப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.

குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கடனுக்கான வட்டி கணிக்கப்படுமெனின், அறவிடப்படும் ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் கணிக்க.

சலவை இயந்திரத்தின் பெறுமானம் = ரூ. 30 000
முதலில் செலுத்த வேண்டிய பணம் = ரூ. 5 000
செலுத்துவதற்கு உள்ள மீதிப் பணம் = ரூ. 30 000 – 5 000
= ரூ. 25 000
மாதந்தோறும் செலுத்த வேண்டிய கடன் பகுதி = ரூ. 25 000 ÷ 10
= ரூ. 2 500
தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. 2 720 × 10
= ரூ. 27 200
செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டி = ரூ. 27 200 – 25 000
= ரூ. 2 200
மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை = $\frac{10}{2}(10 + 1)$
= 55
ஒரு மாத அலகிற்கு வட்டி = ரூ. 2 200 ÷ 55
= ரூ. 40
அறவிடப்படும் ஆண்டு வட்டி வீதம் = $\frac{40}{2\,500} \times 100\% \times 12$

= 19.2%

பயிற்சி 9.1

1. ரேவதி 12% ஆண்டு வட்டியை அறவிடும் ஒரு வங்கியிலிருந்து ரூ.50 000 கடனைப் பெற்றாள். அக்கடனை 10 சமனான மாதத் தவணைத் தொகைகளில் செலுத்தி முடித்தல் வேண்டும்.
(i) ஒரு மாதத்தில் செலுத்தும் கடன் பகுதியைக் காண்க.
(ii) ஒரு கடன் பகுதிக்காக ஒரு மாதத்தில் செலுத்த வேண்டிய வட்டி யாது?
(iii) வட்டி செலுத்தப்பட வேண்டிய மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை யாது?
(iv) குறைந்து செல்லும் மீதி முறையின் கீழ் கடனுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டியைக் காண்க.
(v) ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. ஓர் அரசாங்க அலுவலர் தமது மாதச் சம்பளத்தின் பத்து மடங்கான பணத்தை 3% ஆண்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் கடனாகப் பெறத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அக்கடனைச் சமனான மாதத் தவணைத்தொகைகளாக 5 ஆண்டுகளில் செலுத்தி முடித்தல் வேண்டும். அரச அலுவலரான சங்கரின் மாதச் சம்பளம் ரூ. 30 000 ஆகும்.

(i) சங்கர் பெறத்தக்க கடன் தொகை யாது?
(ii) கடனைச் செலுத்தத் தரப்பட்டுள்ள காலம் எத்தனை மாதங்கள்?
(iii) செலுத்த வேண்டிய ஒரு மாத அலகுக்கான வட்டியைக் கணிக்க.
(iv) கடனுக்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டியைக் காண்க.
(v) ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. ரூ. 35 000 பெறுமானமுள்ள ஒரு உணவு மேசையை முதலில் ரூ. 5000 ஐயும் மீதியை 15 சமமான மாதத் தவணைத் தொகைகளாகவும் செலுத்திப் பெறலாம். கடனுக்காக 18% ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படும் அதே வேளை வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கணக்கிடப்படுகின்றது. செலுத்த வேண்டிய ஒரு கடன் தவணைத் தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. உடன்காசுக்கு ரூ. 150 000 ஆன ஒரு மோட்டார் சைக்கிளை முதலில் ரூ. 30 000 ஐயும் மீதியை 24% ஆண்டு வட்டியுடன் சமமான மாதத் தவணைத்தொகைகளில் 2 ஆண்டுகளில் செலுத்தி முடிக்கலாம். வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கணக்கிடப்படுமெனின், செலுத்த வேண்டிய ஒரு கடன் தவணைத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. திரு. குமார் ரூ. 12 000 கடனை 6 மாதத் தவணைத்தொகைகளில் செலுத்தி முடிப்பதன் பேரில் பெற்றுள்ளார். ஒரு மாதத் தவணைத்தொகையின் பெறுமானம் ரூ. 2 500 ஆகும்.
(i) மாதந்தோறும் செலுத்த வேண்டிய கடன் பகுதியைக் காண்க.
(ii) தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.
(iii) செலுத்த வேண்டிய மொத்த வட்டியைக் காண்க.
(iv) மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(v) ஒரு மாத அலகிற்கு வட்டியைக் காண்க.
(vi) ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

6. உடன் காசுக்கு ரூ. 36 000 ஆன ஒரு குளிரேற்றியை முதலில் ரூ. 6000 ஐயும் மீதியை ரூ.1500 வீதம் 24 சம மாதத் தவணைத்தொகைகளிலும் செலுத்திப் பெறலாம். வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்குக் கணிக்கப்படுமெனின், அறவிடப்பட்டுள்ள ஆண்டு வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

7. ஒரு தையல் இயந்திரத்தை உடன்காசுக்கு ரூ. 23 000 இற்கு விற்கப்படுகின்றது. தவணைத்தொகைகளாகச் செலுத்தும் முறையில் முதலில் ரூ. 5 000 ஐயும் மீதியை ரூ. 2000 வீதம் 10 சமமான மாதத் தவணைத்தொகைகளிலும் செலுத்துவதன் பேரில் பெறலாம். கடனுக்கான வட்டி குறைந்து செல்லும் மீதி முறையில் கணிக்கப்படுமெனின், அறவிடப்படும் ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

9.2 கூட்டு வட்டி

கடனுக்கான அல்லது வைப்புப் பணத்துக்கான வட்டி கணிக்கப்படும் வேறொரு முறையாகக் கூட்டு வட்டி முறையை அறிமுகஞ்செய்யலாம். இம்முறையின் கீழ் வட்டி கணிக்கப்படும் விதத்தை ஓர் உதாரணத்தைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

10 % ஆண்டு வட்டியைச் செலுத்தும் ஒரு வங்கியில் 3 ஆண்டு காலத்திற்கு ரூ. 25 000 நிலையான வைப்பைப் பேணும் ஒருவருக்கு 3 ஆண்டுகளின் இறுதியில் வங்கியின் மூலம் வழங்கப்பட்ட கணக்கு அறிக்கை கீழே காணப்படுகின்றது.

திகதி	விவரம்	வைப்புச் செய்த பணம் ரூ.	வட்டி (ரூ.)
2013.01.01	பண வைப்பு	25 000.00	_
2013.12.31	வட்டி	_	2 500.00
2014.01.01	மீதி	27 500.00	_
2014.12.31	வட்டி	_	2 750.00
2015.01.01	மீதி	30 250.00	_
2015.12.31	வட்டி	_	3 025.00
2016.01.01	மீதி	33 275. 00	_

மேற்குறித்த அறிக்கைக்கேற்ப பண வைப்பாளருக்கு 2013 ஆம் ஆண்டுக்காக ரூ. 2 500 வட்டி கிடைத்துள்ளது. அவ்வட்டி ரூ. 25 000 ஆன வைப்புப் பணத்தில் 10% என்பது தெளிவாகும். அவ்வறிக்கைக்கேற்ப 2014.01.01 ஆந் திகதி கணக்கில் வைப்பில் இருந்த மொத்தப் பணமாக கருதப்படுவது முதலில் வைப்புச் செய்த பணத்தினதும் 2013 ஆம் ஆண்டிற்காகக் கிடைத்த வட்டியினதும் மொத்தமாகிய ரூ. 27 500 ஆகும். மேலும் 2014 ஆம் ஆண்டிற்காகக் கிடைத்துள்ள வட்டி ரூ. 2 750 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அது ரூ. 27 500 ஆன மொத்தப் பணத்தில் 10% என்பது தெளிவாகும். இவ்வாறு ஒவ்வோர் ஆண்டின் இறுதியிலும் கிடைக்கும் வட்டியை மொத்தப் பணத்துடன் சேர்த்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தை வைப்புச் செய்த பணமாகக் கருதி அடுத்த ஆண்டுக்கான வட்டி கணிக்கப்பட்டுள்ளது தெரிகின்றது.

இவ்வாறு ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் வட்டியைக் கணிக்கையில் தொடக்கப் பணத்திற்கு மாத்திரமல்ல ஆண்டுதோறும் பெறப்பட்டுள்ள வட்டிக்கும் வட்டி வழங்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே இம்முறையில் வட்டியைக் கணிக்கும் முறை **கூட்டுவட்டிமுறை** எனப்படும்.

வைப்புப் பணத்துக்கான வட்டியைக் கணிப்பது போன்று கடனைப் பெறும்போதும் கடனுக்கான வட்டியைக் கணித்தல் கூட்டு வட்டி முறைக்கு மேற்கொள்ளப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

10% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கு ரூ.10 000 ஐக் கடனாகப் பெற்ற ஒருவர் 2 ஆண்டுகளின் இறுதியில் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்காகச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

கடனாகப் பெற்ற பணம் = ரூ. 10 000
ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி வீதம் = 10%
முதல் ஆண்டுக்கான வட்டி = ரூ. $10\ 000 \times \frac{10}{100}$
= ரூ. 1 000
முதல் ஆண்டின் இறுதியில் மொத்தப் பணம் = ரூ. 10 000 + 1 000
= ரூ. 11 000
இரண்டாம் ஆண்டிற்கான வட்டி = ரூ. $11\ 000 \times \frac{10}{100}$
= ரூ. 1 100
இரண்டாம் ஆண்டின் இறுதியில் செலுத்தவேண்டிய மொத்தப் பணம் = ரூ. 11 000 + 1 100
= ரூ. 12 100

கூட்டு வட்டி முறைக்கு வட்டியை மேற்குறித்தவாறு ஒவ்வோர் ஆண்டுக்கும் வேறுவேறாகக் கண்டு கடனுடன் வட்டி கூட்டப்பட்டு மொத்தப் பணத்தைக் காணலாம்.

உதாரணம் 2

கமலன் ரூ.50 000 ஐ 6% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் மூன்று ஆண்டுகளுக்காக ஒரு நிலையான வைப்பாக ஒரு வங்கியில் முதலீடு செய்கின்றார். நிமலன் ரூ.50 000 ஐ 6% ஆண்டு எளிய வட்டி வீதத்தின் கீழ் ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்கின்றார். மூன்று ஆண்டுகளின் இறுதியில் கமலனுக்கும் நிமலனுக்கும் உரிய மொத்தப் பணத்தைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

முதலாம் ஆண்டின் இறுதியில் கமலனுக்குக் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் = ரூ. $50\ 000 \times \frac{106}{100}$
= ரூ. 53 000.00

இரண்டாம் ஆண்டின் இறுதியில் கமலனுக்குக் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் = ரூ. $53\ 000 \times \frac{106}{100}$
= ரூ. 56 180.00

மூன்றாம் ஆண்டின் இறுதியில் கமலனுக்குக் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் = ரூ. $56\ 180 \times \frac{106}{100}$
= ரூ. 59 550.80

3 ஆண்டுகளின் இறுதியில் நிமலனுக்குக் கிடைக்கும்

மொத்த வட்டி $= \text{ரூ. } 50\,000 \times \frac{6}{100} \times 3$

$= \text{ரூ. } 9\,000.00$

3 ஆண்டுகளின் இறுதியில் நிமலனுக்குக் கிடைக்கும்

மொத்தப் பணம் $= \text{ரூ. } 9\,000 + 50\,000$

$= \text{ரூ. } 59\,000.00$

கூட்டு வட்டி முறையில் மூன்று வருடங்களில் கிடைக்கும் தொகையைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றலாம்

மொத்தப் பணம் $= \text{ரூ. } 50\,000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100}$

$= \text{ரூ. } 59\,550.80$

பயிற்சி 9.2

1. ஆண்டுக்கு 5% ஆன கூட்டு வட்டிக்கு ரூ. 5 000 கடனைப் பெற்ற ஒருவர் 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்குச் செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

2. ஆண்டுக்கு 7% ஆன கூட்டு வட்டிக்கு ரூ. 6 000 ஐ ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்த ஒருவருக்கு 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் உரிய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

3. ராதா 12% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கு ரூ. 8 000 ஐ வங்கியில் வைப்புச் செய்கின்றாள். ஓர் ஆண்டுக்குப் பின்னர் வங்கியில் வட்டி வீதம் 2% இனால் குறையுமெனின், 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் ராதாவுக்குக் கிடைக்கும் மொத்த வட்டியைக் கணிக்க.

4. ஹசனும் காசிமும் இரு நண்பர்கள். ஹசன் ரூ. 25 000 ஐ 15% ஆண்டு எளிய வட்டிக்கும் காசிம் ரூ. 25 000 ஐ 14% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கும் ஒரே நாளில் கடனுக்குக் கொடுத்திருப்பின் 3 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் எவருக்குக் கூடுதலான பணம் கிடைக்கும் எனக் கணிக்க.

5. 12% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டியைக் கொடுக்கும் ஒரு வங்கி ஒவ்வொரு 6 மாதங்களுக்கும் ஒரு தடவை வங்கியில் வைப்புச் செய்யும் பணத்திற்கான வட்டியைக் கணித்து அவ்வட்டியைத் பணத்துடன் கூட்டுகின்றது. ஓர் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் அவ்வங்கியில் ரூ. 40 000 ஐ வைப்புச்செய்த ஒருவருக்கு ஓர் ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் மொத்தப் பணம் யாது?

6. 8% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டிக்கு ஒரு குறித்த பணத்தைக் கடனாகக் கொடுத்துள்ள ஒருவருக்கு இரண்டாம் ஆண்டின் இறுதியில் கிடைத்த வட்டி ரூ. 432 எனின், அவர் கடனாகக் கொடுத்துள்ள பணத்தைக் கணிக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு தொலைக்காட்சியின் விற்பனை விலை ரூ. 45 000 ஆகும். ஒரே தடவையில் பணத்தைச் செலுத்தித் தொலைக்காட்சியைக் கொள்வனவு செய்யும் ஒருவருக்கு 6% கழிவு கிடைக்கும் அதே வேளை அதனைத் தவணைத் தொகைகளாகச் செலுத்துவதற்காகப் பெறும் ஒருவர் முதலில் ரூ. 9000 ஐயும் மீதியை சமனான 12 மாதத் தவணைத்தொகைகளாகவும் செலுத்தி முடிக்கலாம். கடனுக்காகக் குறைந்து செல்லும் மீதி முறைக்கு 24% ஆண்டு வட்டி அறவிடப்படுகின்றது.

(i) உடன் காசுக்குத் தொலைக்காட்சியைக் கொள்வனவு செய்யும்போது செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

(ii) தவணையில் செலுத்தும் முறைக்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது செலுத்த வேண்டிய மொத்தப் பணம் யாது?

(iii) உடன் காசுக்குத் தொலைக்காட்சியைக் கொள்வனவு செய்யும்போது தவணை முறையில் பெறுவதிலும் பார்க்க எவ்வளவு அனுகூலம் கிடைக்கும்?

2. ஒருவர் 4.2% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டி வீதத்தின் கீழ் ரூ.100 000 ஐக் கடனாகப் பெற்று அப்பணத்தை 8% ஆண்டுக் கூட்டு வட்டியைக் கொடுக்கும் ஒரு வங்கியில் வைப்புச் செய்கின்றார். 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர், வைப்புச் செய்த பணத்தைப் பெற்றுக்கொண்டு கடனைச் செலுத்துவாரெனின், அம்முதலீட்டில் அவர் பெற்ற இலாபத்தைக் கணிக்க.

3. ஒருவர் ஒரு குறித்த கூட்டு வட்டி வீதத்திற்கு ஒரு தொகையைக் கடனாகப் பெறுகின்றார். 2 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு ரூ. 14 400 ஐயும் 3 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் கடனிலிருந்து விடுபடுவதற்கு ரூ. 17 280 ஐயும் செலுத்த வேண்டுமெனின், கடனாகப் பெற்ற பணத்தையும் ஆண்டு வட்டி வீதத்தையும் காண்க.

10 பங்குச் சந்தை

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- பங்குச் சந்தையையும் அதன் இயல்பையும் இனங்காண்பதற்கும்
- பங்குச் சந்தையுடன் தொடர்புபட்ட விசேட பதங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- கம்பனிகளில் முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் பங்கிலாபத்தைக் கணிப்பதற்கும்
- பங்குகளுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அறிமுகம்

எமது நாட்டில் வணிக நடவடிக்கைகள் 2007 ஆண்டின் 7 ஆம் இலக்கக் கம்பனிச் சட்டத்தின் கீழ் பதிவுசெய்யப்பட்ட கம்பனிகளில் இடம்பெறுகின்றன. இக்கம்பனிகளின் உரிமை ஒரு தனியாளிடம் அல்லது பல தனியாட்களிடம் இருக்கலாம். கம்பனிகளின் அமைப்பிற்கேற்ப அவை

- வரையறுத்த தனியார் கம்பனிகள்
- வரையறுத்த பொதுக் கம்பனிகள்

என வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

வரையறுத்த பொதுக் கம்பனிகளுக்கு தமது வணிகங்களை ஆரம்பிப்பதற்கு அல்லது நடத்துவதற்குத் தேவையான நிதி வளத்தை திரட்டிக் கொள்வதற்கு பொது மக்களையும் இணைத்துக் கொள்ளலாம். இதற்கேற்ப இன்று வியாபார உலகில் உள்ள பிரசித்திபெற்ற முறை பகிரங்க ஊடக அறிவித்தலின் மூலம் பொதுமக்களிடம் கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யுமாறு வேண்டுதலாகும். பொதுமக்கள் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த பின்னர் தமது பங்குகளை வேறொருவருக்கு விற்பனை செய்யலாம். அவ்வாறு பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கும் விற்பனை செய்வதற்குமான வசதிகள் வழங்கப்பட்டுள்ள இடம் பங்குச் சந்தை எனப்படும்.

பங்குச் சந்தை (Share market)

‘‘**கொழும்பு வியாபாரப் பொருள் பரிமாற்றம்**’’ எனவும் இது அழைக்கப்படும். பங்குச் சந்தையானது இலங்கைப் பிணைகள் பரிவர்த்தனை ஆணைக்குழுவினால் கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றது. இவ்வாணைக்குழு பங்குச் சந்தையின் பணிகளுக்கு வழிகாட்டல், நடத்தல், மேற்பார்வை ஆகிவற்றை மேற்கொள்கின்றது. பங்குக் கொடுக்கல்வாங்கல்களுக்காகப் பங்குச் சந்தைக்கு வரும் கம்பனிகள் பதிவுசெய்து

பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகளாகக் கம்பனிப் பதிவேட்டில் சேர்க்கப்படுதல் வேண்டும். 2015 ஏப்பிரல் 21 ஆந் திகதி இவ்வாறு பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகளின் எண்ணிக்கை 297 ஆகும். அக்கம்பனிகளின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யும்போது அல்லது விற்பனை செய்யும்போது வாடிக்கையாளர்களுக்கு உதவுவதற்காகத் தரகுக் கம்பனிகளும் பங்குச் சந்தையில் தொழிற்படுகின்றன.

பங்குச் சந்தைக் கொடுக்கல்வாங்கல்கள் இணையத்தினூடாக இற்றைப்படுத்தப்படும் அதேவேளை பொதுமக்களுக்கும் இணையத்தினூடாகக் கொடுக்கல்வாங்களைச் செய்வதற்கு வசதிகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன.

10.1 பங்குகள்

பட்டியற்படுத்தப்பட்ட வரையறுத்த பொதுக் கம்பனிகள் தமது மூலதனத்தைத் திரட்டுவதற்குப் பொதுமக்களைப் பங்குகள் எனப்படும் அலகினூடாக தொடர்புபடுத்திக்கொள்கின்றன. கம்பனியின் தொடக்க மூலதனத்தை ஓர் அலகாகக் கருதி அதனைச் சமமாகப் பிரிக்கும்போது அதில் ஒரு பகுதி **பங்கு** எனப்படும்.

ஒரு குறித்த கம்பனி முதல் தடவையாகத் தனது தொடக்கப் பங்குகளைப் பொதுமக்களுக்கு வழங்கும்போது ஒரு பங்குக்கான விலை அக்கம்பனியினால் நிர்ணயிக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விலைக்கு ஒரு குறித்த முதலீட்டாளர் கம்பனியின் பங்குகளின் எவ்வெண்ணிக்கையையும் கொள்வனவு செய்யலாம். ஒரு குறித்த கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த முதலீட்டாளருக்கு அவர் பெற்ற பங்குகளின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதசமமாக அக்கம்பனியின் உரிமை கிடைக்கும்.
இதனைப் பற்றி மேலும் விளங்கிக் கொள்வதற்குப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கருதுக.

ஒரு குறித்த கம்பனி பொதுமக்களுக்கு வழங்கிய 100 000 பங்குகளில் ஒரு முதலீட்டாளர் 10 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்கின்றார். அப்போது முதலீட்டாளருக்குக் கம்பனியின் $\frac{10000}{100000}$ உரிமை கிடைக்கின்றது. அதனை ஒரு சதவீதமாகக் காட்டுவோம்.

$$\frac{10000}{100000} \times 100\% = 10\%$$

ஆகவே முதலீட்டாளர் கம்பனியிடமிருந்து 10% உரிமையைப் பெற்றுள்ளார்.

உதாரணம் 1

ஒரு கம்பனி C அதன் மூலதனமாகவுள்ள ரூ. 10 000 000 ஐ ஒரு பங்கு ரூ. 100 வீதமான 100 000 பங்குகளாகப் பிரித்துப் பொதுமக்களுக்கு வழங்குகின்றது. மோகன் அக்கம்பனியின் 5 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்கின்றார்.

(i) மோகன் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தமையால் கம்பனி C யில் அவர் பெற்ற உரிமையை

(a) ஒரு பின்னமாக

(b) ஒரு சதவீதமாகத் தருக.

(ii) மோகன் கம்பனி C யில் முதலீடு செய்த தொகையைக் காண்க.

(i) கம்பனி வழங்கிய பங்குகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 100\,000$

மோகன் கொள்வனவு செய்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 5\,000$

(a) மோகன் கம்பனியில் கொண்டுள்ள உரிமை பின்னமாக $= \dfrac{5\,000}{100000} = \dfrac{1}{20}$

(b) சதவீதமாக $= \dfrac{1}{20} \times 100\%$

$= 5\%$

(ii) ஒரு பங்கின் விலை = ரூ. 100

மோகன் கொள்வனவு செய்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 5000$

முதலீடு செய்த தொகை = ரூ. 100×5000

= ரூ. $500\,000$

பங்குகளுக்கான பங்கிலாபம்

பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகள் தமது தொடக்கப் பங்குகளை வழங்கும்போது கம்பனியின் இலாபத்தில் பங்குதாரர்களுக்காக வருமானமாக வழங்கும் தொகையின் அளவை அறிவிக்கின்றன. அது ஒரு பங்குக்குச் செலுத்தப்படும் தொகையின் மூலம் காட்டப்படுகின்றது. அவ்வாறு செலுத்தப்படும் தொகை ஆண்டுதோறும் அல்லது காலாண்டுகளுக்காகச் செலுத்தப்படும் அதே வேளை அது பங்கிலாபம் எனப்படும்.

ஓர் உதாரணமாக ஒரு கம்பனி அதன் பங்குதாரர்களுக்காக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைச் செலுத்துகின்றது. இப்பங்கிலாபம் கம்பனியின் தீர்மானத்திற்கேற்ப அவ்வப்போது மாற்றியமைக்கப்படலாம். மேலும் விளங்கிக்கொள்வதற்கு மேற்குறித்த உதாரணத்தை மீண்டும் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

மோகன் கொள்வனவு செய்த ரூ. 100 பங்குகள் 5000 இற்குக் கம்பனி C ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைச் செலுத்துகின்றது.

(i) மோகன் பங்குகளை முதலீடுசெய்வதன் மூலம் பெறும் ஆண்டு வருமானத்தைக் காண்க.

(ii) மோகனிற்குக் கிடைக்கும் ஆண்டு வருமானத்தை முதலிட்ட தொகையின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

(i) மோகனிடம் உள்ள பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 5000$

ஒரு பங்கிற்குரிய ஆண்டு வருமானம் $=$ ரூ. 4

மோகன் பெறும் ஆண்டு வருமானம் $=$ ரூ. 5000×4

$=$ ரூ. 20 000

(ii) மோகன் முதலீடு செய்த தொகை $=$ ரூ. 100×5000

$=$ ரூ. 500 000

∴ அவருடைய ஆண்டு வருமானம் சதவீதமாக $= \dfrac{20000}{500000} \times 100\%$

$= 4\%$

இப்போது பங்கு முதலீட்டின் அடிப்படைச் சந்தர்ப்பத்திற்குரிய விடயங்கள் இடம்பெறும் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 10.1

1. ஒரு முதலீட்டாளர் நவீனம் ஆடைக் கம்பனியின் ஒரு பங்கு ரூ. 25 வீதம் 1000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார்.

(i) அவர் முதலீடுசெய்த தொகை யாது?

(ii) கம்பனி ஆண்டு பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 ஐச் செலுத்தினால், முதலீட்டாளரின் ஆண்டு வருமானத்தைக் காண்க.

2. பின்வரும் அட்டவணைகளைப் பூரணப்படுத்துக.

(i)

ஒரு பங்கின் விலை ரூ.	பங்குகளின் எண்ணிக்கை	முதலீடுசெய்த தொகை ரூ.
10	2500	....
20	5000	....
....	500	50 000
....	4000	80 000
30	....	30 000
45	....	135 000

(ii)

பங்குகளின் எண்ணிக்கை	ஆண்டு பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு (ரூ.)	ஆண்டு பங்கிலாப வருமானம் (ரூ.)
500	2	....
1000	3.50	....
....	5	5000
....	2.50	500 000
2000	....	8000
750	....	2250

3. ஒரு வரையறுத்த பொதுக் கம்பனி அதன் மூலதனத்தைத் திரட்டுவதற்காக ஒரு பங்கு ரூ. 25 வீதமான 10 000 000 பங்குகளைப் பொதுமக்களுக்கு வழங்குகின்றது. அப்பங்குகளுக்கான ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 ஆகும். அக்கம்பனியில் முதலீட்டுக்காக முன்வரும் சங்கர் கம்பனியின் 50 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்கின்றார்.

(i) கம்பனியின் மூலதனத்தைக் காண்க.

(ii) சங்கர், கம்பனியில் முதலீடு செய்த தொகையைக் காண்க.

(iii) பங்கு முதலீட்டிலிருந்து சங்கருக்கு ஆண்டுதோறும் கிடைக்கும் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(iv) சங்கரின் ஆண்டுப் பங்கிலாபம் அவர் இட்ட தொகையின் என்ன சதவீதமாகும் ?

4. ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தை ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 3 வீதம் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றில் ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையான பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 20 வீதம் சந்தானம் கொள்வனவு செய்தார். அவர் அம்முதலீட்டிலிருந்து ஆண்டின் இறுதியில் ரூ. 12 000 பங்கிலாபத்தை வருமானமாகப் பெறுகின்றார்.

(i) கம்பனியில் சந்தானம் வைத்திருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்குச் சந்தானம் முதலீடு செய்த தொகையைக் காண்க.

5. கணேசன் தன்னிடமிருந்த ரூ. 100 000 தொகையில் அரைவாசியை ஒரு குறித்த கம்பனியில் ஆண்டுதோறும் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 வீதம் செலுத்தப்படும் ரூ. 25 பங்குகளின் ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையைக் கொள்வனவு செய்வதற்கும் மீதியை அரையாண்டிற்கு 12% வட்டியை வழங்கும் ஒரு நிதி நிறுவனத்தில் வைப்புச் செய்வதற்கும் தீர்மானித்தார். ஓர் ஆண்டின் பின்னர் கணேசனுக்கு எந்த முதலீடு அனுகூலமானது என்பதைக் காரணங் காட்டித் துணிக.

10.2 பங்குச் சந்தைக் கொடுக்கல்வாங்கல்கள்

பங்குச் சந்தையில் பட்டியற்படுத்தப்பட்ட கம்பனிகள் மாத்திரம் கொடுக்கல் வாங்கல்களுக்காகப் பிரவேசிப்பதற்கான சந்தர்ப்பம் கிடைக்கின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். அத்தகைய ஒரு கம்பனி தொடக்கத்தில் பொதுமக்களுக்குப் பங்குகளை வழங்கிய பின்னர் நடைபெறும் பங்குக் கொடுக்கல் வாங்கல்கள் பற்றிக் கற்பதற்காகப் பின்வரும் குறிப்பில் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

வரையறுத்த யுனைட்டட் கம்பனி ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 வீதம் ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைச் செலுத்தும் 100000 பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 10 ஆன தொடக்க அறிமுக விலைக்குப் பொதுமக்களுக்கு வழங்கியது. ஓர் ஆண்டிற்குப் பின்னர் இக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் விலை பங்குச் சந்தையில் ரூ. 20 இற்கு உயர்ந்தது.அவ்வேளையில் நதீசா மேற்குறித்த கம்பனியின் 1000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார். சில ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் அக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 28 ஆக உயர்ந்தபோது அவர் தம்மிடமிருந்த 1000 பங்குகளையும் விற்றார்.

ஒரு குறித்த கம்பனியில் பங்கை அறிமுகஞ் செய்யும் தொடக்க விலையின் கீழ் முதலீட்டாளர்கள் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யும் சந்தர்ப்பம் பங்குச் சந்தையில் **முதன்மைச் சந்தை** எனப்படும். முதன்மைச் சந்தையில் முதலீட்டாளர்கள் பங்குகளை கொள்வனவு செய்தலை மாத்திரம் செய்யலாம். எனினும் அதன் பின்னர் பங்குக் கொடுக்கல்வாங்கலுக்கு இடமளித்துக் கொண்டு பங்கிற்கான கேள்விக்கேற்ப பங்குகளுக்குப் புதிய விலை ஏற்படலாம். அவ்விலை அச்சந்தர்ப்பத்தில் **சந்தை விலை எனப்படும்**. இச்சந்தர்ப்பம் பங்குச் சந்தையில் **துணைச் சந்தை** எனப்படும். மேற்குறித்த யுனைட்டட் கம்பனியின் ஒரு பங்கின் விலை ரூ. 20 ஆக உயர்ந்து, மறுபடியும் சில ஆண்டுகளில் ரூ. 28 ஆக உயர்ந்தது. இவ்வாறு ஒரு பங்கின் சந்தை விலை குறைந்து கூடுதல் துணைச் சந்தையில் நடைபெறுகின்றது. அச்சந்தர்ப்பத்தில் முதலீட்டாளர்கள் தம்மிடமுள்ள பங்குகளை விற்பனை செய்யவோ, புதிய பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்யவோ முடியும்.

மூலதன இலாபம்

ஒரு கம்பனியின் பங்குகளை அதன் அறிமுகஞ் செய்யப்படும் விலைக்கு அல்லது சந்தை விலைக்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது அவ்விலையானது ஒரு பங்கின் கொள்விலை எனவும் அப்பங்குகளைச் சந்தை விலைக்கு விற்கும்போது அவ்விலையானது ஒரு பங்கின் விற்பனை விலை எனவும் அழைக்கப்படும்.

ஒரு முதலீட்டாளர் பங்குகளை விற்கும்போது அல்லது கொள்வனவு செய்யும்போது இலாபம் அல்லது நட்டம் ஏற்படலாம். ஒருவர் தன்னிடமுள்ள பங்குகளை விற்கும்போது

விற்பனை விலை > கொள்வனவு விலை எனின் அப்போது மூலதன இலாபம் கிடைக்கின்ற அதே வேளை இது
மூலதன இலாபம் = பங்குகளின் விற்பனை விலை – பங்குகளின் கொள்விலை
இனால் வரையறுக்கப்படும்.

அவ்வாறே,
விற்பனை விலை < கொள்விலை எனின், மூலதன நட்டம் ஏற்படுகின்ற அதேவேளை மூலதன நட்டமானது
மூலதன நட்டம் = பங்குகளின் கொள்விலை – பங்குகளின் விற்பனை விலை
இனால் வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

பங்குச் சந்தையுடன் தொடர்புபட்ட ஒரு முதலீட்டாளராகிய திரு. பெரேரா ஒரு குறித்த கம்பனியின் 2000 பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 20 வீதம் கொள்வனவு செய்தார். அக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 25 ஆக உயர்ந்தபோது அவர் தம்மிடமிருந்த கம்பனியின் எல்லாப் பங்குகளையும் விற்றார். திரு.பெரேரா
(i) கம்பனியில் முதலீடுசெய்த தொகையைக் காண்க.
(ii) பங்குகளை விற்பதன் மூலம் அவர் பெற்ற தொகையைக் காண்க.
(iii) பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.
(iv) பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் கொள்விலையின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

(i) கம்பனியில் முதலீடுசெய்த தொகை = ரூ. 20×2000
= ரூ. 40 000

(ii) பங்குகளை விற்பதால் கிடைக்கும் தொகை = ரூ. 25×2000
= ரூ. 50 000

(iii) மூலதன இலாபம் = ரூ. $50000 - 40000$
= ரூ. 10 000

(iv) மூலதன இலாபம் கொள்விலையின் சதவீதமாக $= \frac{10000}{40000} \times 100\%$

$= 25\%$

மேலே (iv) இல் குறிப்பிட்ட மூலதன இலாபச் சதவீதத்தை ஒரு பங்கின் விலையின் சார்பிலும் பெறலாம்.
ஒரு பங்கின் கொள்விலை = ரூ. 20
ஒரு பங்கின் விற்பனை விலை = ரூ. 25

∴ மூலதன இலாபம் சதவீதமாக $= \frac{25-20}{20} \times 100\%$

$= \frac{5}{20} \times 100\%$

$= 25\%$

உதாரணம் 2

திரு. முகமது தம்மிடமிருந்த ரூ. 96 000 தொகையில் ஒரு குறித்த அளவை ஆண்டுப் பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 வீதம் செலுத்தும் கம்பனி A யின் ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையிலான பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 18 வீதம் கொள்வனவு செய்வதற்கு முதலிட்டார். மீதிப் பகுதியை ஆண்டுப் பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு 3.50 வீதம் செலுத்தும் கம்பனி B யின் குறித்த எண்ணிக்கையிலான பங்குகளை ஒரு பங்கு ரூ. 21 வீதம் கொள்வனவு செய்வதற்கு முதலிட்டார். ஓர் ஆண்டின் இறுதியில் கம்பனி A யின் ஆண்டுப் பங்கிலாபமாகக் கிடைத்த தொகையிலும் பார்க்க ரூ.1000 கூடுதலாகக் கம்பனி B யிடமிருந்து அவருக்குப் பங்கிலாபமாகக் கிடைத்தது. திரு முகமது

(i) கம்பனி A யில் முதலீடு செய்த தொகையை x எனக் கொண்டு x இடம்பெறும் ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) ஒவ்வொரு கம்பனியிலும் முதலீடுசெய்த தொகையை சமன்பாட்டைத் தீர்த்துக் காண்க.

(iii) இரு கம்பனிகளிலும் அவருக்கு இருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கைகளை வேறுவேறாகக் காண்க.

(iv) ஒவ்வொரு கம்பனியிலிருந்தும் கிடைத்த ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானத்தைக் காண்க.

ஆண்டு வருமானம் கிடைத்த பின்னர் திரு முகமது இரு கம்பனிகளிலும் அவருக்கு இருந்த எல்லாப் பங்குகளையும் அப்போது இரு கம்பனிகளிலும் பங்கின் சந்தை விலையாக இருந்த ரூ. 20 வீதம் விற்றார்.

(v) இரு கம்பனிகளிலும் இருக்கும் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் கிடைத்த மொத்தத் தொகையைக் காண்க.

(vi) இரு கம்பனிகளிலும் செய்த முதலீட்டின் பயனாக ஆண்டின் இறுதியில் கிடைக்கும் பங்கிலாப வருமானத்தினதும் மூலதன இலாபத்தினதும் மொத்தமானது இடப்பட்ட தொகையில் 20% ஆகவேனும் இருத்தல் வேண்டும் என்னும் திரு முகமதுவின் எதிர்பார்ப்பு நிறைவேற்றப்படவில்லை எனக் காட்டுக.

(i) கம்பனி A யிலிருந்து பெற்ற பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{x}{18}$

கம்பனி A யில் ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானம் $=$ ரூ. $\dfrac{x}{18} \times 2 = \dfrac{x}{9}$

அவ்வாறே,

கம்பனி B யில் ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானம் $=$ ரூ. $\dfrac{(96000 - x)}{21} \times 3.50$

$$= \text{ரூ. } \frac{(96000 - x)}{\cancelto{3}{21}} \times \frac{\cancelto{1}{7}}{2}$$

$$= \text{ரூ. } \frac{(96000 - x)}{6}$$

$\therefore \quad \dfrac{(96000 - x)}{6} - \dfrac{x}{9} = 1000$ ஆனது தேவையான சமன்பாடாகும்.

(ii)

$$\frac{(96000 - x)}{6} - \frac{x}{9} = 1000$$

$$18 \times \frac{(96000 - x)}{6} - 18 \times \frac{x}{9} = 18 \times 1000$$

$$3\,(96\,000 - x) - 2x = 18\,000$$

$$288\,000 - 3x - 2x = 18\,000$$

$$288\,000 - 18\,000 = 5x$$

$$270\,000 = 5x$$

$$x = 54\,000$$

$\therefore$ கம்பனி A யில் முதலீடுசெய்த தொகை = ரூ. 54 000

கம்பனி B யில் முதலீடுசெய்த தொகை = ரூ. 96 000 – ரூ. 54 000
= ரூ. 42 000

(iii) கம்பனி A யில் இருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{54\,000}{18} = 3\,000$

கம்பனி B யில் இருந்த பங்குகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{42\,000}{21} = 2\,000$

(iv) கம்பனி A யில் செய்த முதலீட்டிலிருந்து கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 3 000 × 2 = ரூ. 6 000

கம்பனி B யில் செய்த முதலீட்டிலிருந்து கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 2 000 × 3.50 = ரூ. 7 000

(v) கம்பனி A யின் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 3 000 × 20 = ரூ.60 000

கம்பனி B யின் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் கிடைத்த வருமானம் = ரூ. 2 000 × 20 = ரூ. 40 000

$\therefore$ இரு கம்பனிகளிலும் உள்ள பங்குகளை விற்றுப் பெற்ற பங்கிலாப வருமானம் = ரூ. 60 000 + 40 000
= ரூ. 100 000

இரு கம்பனிகளிலிருந்தும் கிடைத்த ஆண்டு
பங்கிலாப வருமானம் = ரூ. 6 000 + 7 000
= ரூ. 13 000

∴ ஆண்டின் இறுதியில் உள்ள பங்கிலாப வருமானத்தினதும், விற்பதன் மூலம் பெற்ற தொகையினதும் மொத்தம். = ரூ. 100 000 + 13 000

= ரூ. 113 000

இரு கம்பனிகளினதும் பங்குகளில் முதலீடு
செய்த தொகை = ரூ. 96 000
கிடைத்த இலாபம் = ரூ. 113 000 – 96 000
= ரூ. 17 000

(vi) ∴ பணத்தை முதலீடு செய்வதன் மூலம் கிடைத்த இலாபம் முதலிட்ட தொகையின் சதவீதமாக $= \frac{17\,000}{96\,000} \times 100\%$

$= 17.7\%$

17.7% < 20% ஆகையால் திரு முகமதுவின் எதிர்பார்ப்பு நிறைவேற்றப்படவில்லை.

இப்போது பங்குச் சந்தையில் முதலீடு பற்றி இதுவரைக்கும் கற்ற விடயங்கள் இடம்பெறும் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 10.2

1. அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

முதலீடு செய்யும் பணம் (ரூ.)	ஒரு பங்கின் சந்தை விலை (ரூ.)	கொள்வனவு செய்யும் பங்குகளின் எண்ணிக்கை	ஒரு பங்கிற்கு ஆண்டுதோறும் ரூ. 3 வீதம் பங்கிலாப வருமானம் (ரூ.)
50 000	25	....	....
20 000	40	....	1500
75 000	....	....	3 000
....	15	500	....
120 000	....	2 000	....

2. ஆண்டுதோறும் பங்கிலாபமாக ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 ஐச் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றில் சந்தை விலை ரூ. 30 ஆகவுள்ள பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு முரளி ரூ. 60 000 ஐ முதலிட்டார்.

(i) முரளி கொள்வனவு செய்த பங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) பங்கு முதலீட்டின் மூலம் முரளி பெறும் ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(iii) ஆண்டுப் பங்கிலாபம் முதலிடப்பட்ட பணத்தின் என்ன பின்னமாகும் எனக் காண்க.

3. ரமேஸ் ஒரு குறித்த கம்பனியில் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 40 ஆக இருக்கும்போது 5 000 பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார். அப்பங்கு ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 50 ஆகவுள்ளபோது அவரிடம் இருந்த கம்பனியின் பங்குகள் எல்லாம் விற்கப்பட்டன.

(i) பங்குகளை விற்கும்போது ரமேஸ் ஒரு பங்கிலிருந்து பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

(ii) எல்லாப் பங்குகளையும் விற்பதன் மூலம் கிடைக்கும் மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

(iii) மூலதன இலாபத்தை முதலிடப்பட்ட பணத்தின் ஒரு பின்னமாகக் காண்க.

4. ஒரு வியாபாரி சந்தை விலை ரூ. 40 ஆகவுள்ள ஒரு குறித்த கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு ரூ. 40 000 ஐ முதலீடுசெய்த அதேவேளை ஓர் ஆண்டின் பின்னர் அவர் இட்ட பணத்தில் 10% ஐப் பங்கிலாபமாகப் பெற்றார். அவ்வருமானத்தைப் பெற்றபின்னர் ஒரு பங்கு ரூ. 50 வீதம் எல்லாப் பங்குகளும் விற்கப்பட்டன.

(i) வியாபாரி கம்பனியிலிருந்து பெற்ற ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(ii) கம்பனி ஒரு பங்கிற்காக ஆண்டுதோறும் செலுத்திய பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

(iii) வியாபாரி பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற பணத்தைக் காண்க.

(iv) வியாபாரிக்குக் கிடைக்கும் மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

(v) வியாபாரியின் மூலதன இலாபத்தை முதலிடப்பட்ட பணத்தின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

5. சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியில் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த ஒருவர் பங்குகளின் சந்தை விலை அதிகரித்த சந்தர்ப்பத்தில் தன்னிடமிருந்த எல்லாப் பங்குகளையும் விற்றார். அதிலிருந்து அவருக்குக் கிடைத்த மூலதன இலாபம் முதலிடப்பட்ட பணத்தின் 80% ஆக இருந்தது.

(i) ஒரு பங்கிலிருந்து அவர் பெற்ற மூலதன இலாபம் யாது?

(ii) ஒரு பங்கு என்ன விலைக்கு விற்கப்பட்டது?

6. ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 24 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியில் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்த ஒருவர் வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் அப்பங்கு ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 30 ஆகவுள்ள ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெறும் மூலதன இலாபத்தை முதலிடப்பட்ட பணத்தின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

7. ஒரு பங்கிற்கு ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ரூ. 6 ஐச் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 40 ஆகவுள்ள 1 000 பங்குகளை உடைய ஒரு முதலீட்டாளர் அப்பங்குகளை ஒரு வருட பங்கிலாப வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் அவற்றின் சந்தை விலை அதிகரித்த ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் விற்றார். பங்குகளை விற்பதன் மூலமும் பங்கிலாப வருமானத்தின் மூலமும் அவர் பெற்ற முழு வருமானம் ரூ. 71 000 ஆக இருந்தது.

(i) பங்கு மூலதனத்திலிருந்து ஓர் ஆண்டிற்குக் கிடைத்த பங்கிலாப வருமானம் யாது?

(ii) அவர் ஒரு பங்கை என்ன விலைக்கு விற்றார்?

(iii) அவர் பெற்ற மூலதன இலாபத்தைக் காண்க.

8. ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 4 வீதம் வழங்கும் சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுமுள்ள பங்குகளையும் ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 வீதம் வழங்கும் சந்தை விலை ரூ. 25 ஆகவுள்ள பங்குகளையும் கொள்வனவு செய்வதற்குச் சேகர் சமனான அளவு பணத்தை முதலிட்டார். இவ்விரு முதலீடுகளிலும் கிடைத்த வருமானத்தை அவர் இட்ட பணத்தின் சதவீதமாகக் காட்டுக. (சாடை : ஒவ்வொரு பங்குகளையும் வாங்குவதற்கு முதலிட்ட பணத்தை x எனக் கொள்க).

9. ஒரு முதலீட்டாளர் தம்மிடமிருந்த ரூ. 70 000 பணத்தில் ஒரு பகுதியை ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 3 செலுத்தும் ஒரு நிறுவனத்தில் சந்தை விலை ரூ. 30 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியின் பங்குகளையும் மீதிப் பகுதியை ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ரூ. 4 செலுத்தும் ஒரு நிறுவனத்தில் சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுள்ள ஒரு கம்பனியின் பங்குகளையும் கொள்வனவு செய்வதற்கு இட்டார். இம்முதலீட்டிலிருந்து அவர் ஓர் ஆண்டிற்குப் பெற்ற வருமானம் ரூ. 9 500 எனின், அவர் ஒவ்வொரு கம்பனியிலும் முதலீடு செய்த பணத்தை வேறுவேறாகக் காண்க.

10. ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 5 ஐச் செலுத்தும் ஒரு கம்பனியின் 4000 பங்குகளை உடைய ஒரு முதலீட்டாளர் அப்பங்குகளின் சந்தை விலை ரூ. 45 ஆகவுள்ள சந்தர்ப்பத்தில் அவற்றை விற்றார். பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற பணத்தை முழுமையாக இட்டு சந்தை விலை ரூ. 25 ஆகவுள்ள வேறொரு கம்பனியின் பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்தார். அம்முதலீடு காரணமாக அவருடைய வருமானம் முதலில் கிடைத்த வருமானத்திலும் பார்க்க ரூ. 8800 இனால் அதிகரித்தது. இரண்டாவது கம்பனியில் ஒரு பங்கிற்காகச் செலுத்தப்படும் ஆண்டுப் பங்கிலாபத்தைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. குருபரன் தன்னிடமிருந்த ரூ. 50 000 பணத்தை நிலையான வைப்புக்காக ஓர் ஆண்டிற்கு 12% செலுத்தும் நிதி நிறுவனம் ஒன்றில் ஓர் ஆண்டிற்கு வைப்புச் செய்தார். ஆண்டின் இறுதியில் நிதி நிறுவனத்திலிருந்து அப்பணத்தை விடுவித்த அவர் ஆண்டிற்குக் கிடைத்த வட்டியுடன் முழுப் பணத்தையும் ஓர் ஆண்டிற்கு ஒரு பங்கிற்கு ரூ.4 செலுத்தும் சந்தை விலை ரூ. 28 உள்ள ஒரு கம்பனியில் முதலீடு செய்தார்.

(i) நிதி நிறுவனத்தில் நிலையான வைப்புக்காகக் கிடைத்த வட்டியைக் காண்க.

(ii) பங்குகளைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு முதலீடு செய்த பணத்தைக் காண்க.

(iii) பங்கு முதலீட்டிலிருந்து கிடைத்த ஆண்டுப் பங்கிலாப வருமானத்தைக் காண்க.

(iv) இரண்டாம் ஆண்டிற்காக வட்டியுடன் முழுப் பணத்தையும் மறுபடியும் நிதி நிறுவனத்தில் வைப்புச் செய்வதா பங்குகளில் முதலீடு செய்வதா அனுகூலமானது என்பதைக் காரணங்களுடன் காட்டுக.

2. ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 ஆகவுள்ள 1500 சமனான பங்குகளைக் கொண்டுள்ள முதலீட்டாளர் அப்பங்குகளை ஓர் ஆண்டின் வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் சந்தை விலை ரூ. 32 ஆகவுள்ள சந்தர்ப்பத்தில் விற்றார். பங்குகளை விற்பதன் மூலம் பெற்ற பணத்தை ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ஒரு பங்கிற்கு ரூ. 2 வீதம் செலுத்தும் ஒரு கம்பனியில் சந்தை விலை ரூ. 40 இல் பங்குகளை வாங்குவதற்கு முதலீடு செய்தார். முதலாம், இரண்டாம் கம்பனிகளின் வருமானங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம் 5 : 4 எனக் காட்டுக.

3. உதயன் 12% எளிய வட்டிக்கு ரூ. 40 000 ஐ ஒரு நிதி நிறுவனத்திலிருந்து கடனாகப் பெற்றார். அவர் அப்பணத்தை முற்றாக ஆண்டுதோறும் ஒரு பங்கிற்குப் ரூ. 4.50 பங்கிலாபம் செலுத்தும் கம்பனி ஒன்றின் சந்தை விலை ரூ. 20 ஆகவுள்ள பங்குகளை வாங்குவதற்கு முதலீடு செய்தார். மூன்று ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் அவர் தன்னிடமிருந்த எல்லாப் பங்குகளையும் அப்போதைய சந்தை விலையாகவிருந்த ரூ. 28 வீதம் விற்று நிதி நிறுவனத்திலிருந்து பெற்ற கடனை வட்டியுடன் முற்றாகச் செலுத்தி முடித்தார். இக்கொடுக்கல்வாங்கல் காரணமாக உதயனிற்கு ரூ. 28 600 இலாபம் கிடைத்ததெனக் காட்டுக.

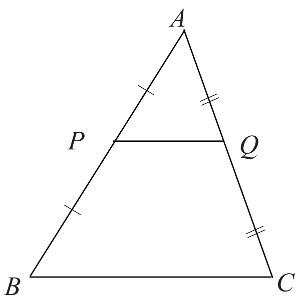
4. ஒரு குறித்த கம்பனி ஒரு பங்கிற்காக ஆண்டுப் பங்கிலாபம் ரூ. 5 ஐச் செலுத்துகின்றது. அக்கம்பனியின் ஒரு பங்கின் சந்தை விலை ரூ. 48 ஆக இருக்கும்போது குமார் அக்கம்பனியின் பங்குகளில் பணத்தை முதலீடு செய்தார். சில ஆண்டுகள் வருமானத்தைப் பெற்ற பின்னர் அவர் தன்னிடமிருந்ந பங்குகளை 30% மூலதன இலாபம் கிடைக்குமாறு ஒரு பங்கின் சந்தை விலை உயர்ந்திருந்த ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் விற்பதற்கு உத்தேசித்தார். அவருடைய எதிர்பார்ப்பு வெற்றியீட்டுவதற்கு ஒரு பங்கை விற்க வேண்டிய விலை யாது?

11 நடுப் புள்ளித் தேற்றம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,
- நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் விளங்கிக் கொள்வதற்கும்
- நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் பயன்படுத்தி பல்வேறு கணிப்புக்களையும் ஏறிகளையும் செய்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

11.1 நடுப் புள்ளித் தேற்றம்



ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களுடன் தொடர்புபட்ட ஒரு பேறை நடுப் புள்ளித் தேற்றம் தருகின்றது. உருவில் காணப்படும் முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யின் நடுப் புள்ளியை P எனவும் பக்கம் AC யின் நடுப் புள்ளியை Q எனவும் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. அப்போது

$AP = PB, AQ = QC$ ஆகும். அதனை

$AP = PB = \frac{1}{2}AB, AQ = QC = \frac{1}{2}AC$ எனவும் எழுதலாம்.

AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டமானது PQ வினால் காட்டப்படுன்றது.

தேற்றம் :
ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டம் முக்கோணியின் மூன்றாவது பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும் அதன் நீளத்தின் அரைவாசியாகவும் இருக்கும்.

மேற்குறித்த உருவில் தேற்றத்திற்கேற்ப

$PQ \,//\, BC$,

$PQ = \frac{1}{2}BC$ ஆகும்.

இத்தேற்றத்தை மெய்ப்பிப்பதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

AB = 6 cm, BC = 7 cm, CA = 8 cm ஆக இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணி ABC யை வரைந்து AB, AC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளை முறையே P, Q எனப் பெயரிடுக.

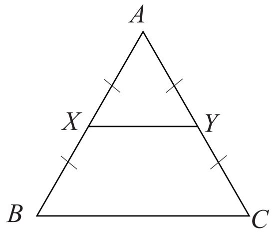
(i) PQ வின் நீளத்தை அளந்து, அது BC யின் நீளத்தில் அரைவாசி என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

(ii) மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக PQ வும் BC யும் சமாந்தரமானவையா எனப் பார்க்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப $PQ = \frac{1}{2}BC$ எனவும் $PQ // BC$ எனவும் காண்பீர்கள்.

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணிகளுடன் தொடர்புபட்ட கணித்தல்கள் உட்பட்ட ஓர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC காணப்படுகின்றது. AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும்.

i. XY இன் நீளம்

ii. நாற்பக்கல் $BCYX$ இன் சுற்றளவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

i. நடுப் புள்ளித் தேற்றத்திற்கேற்ப

$XY//BC$, $XY = \frac{1}{2}BC$ ஆகும்.

$\therefore XY = \frac{1}{2} \times 12$

$= 6$

$\therefore XY$ இன் நீளம் 6 cm ஆகும்.

ii. நாற்பக்கல் $BCYX$ இன் சுற்றளவு $= BC + CY + XY + XB$

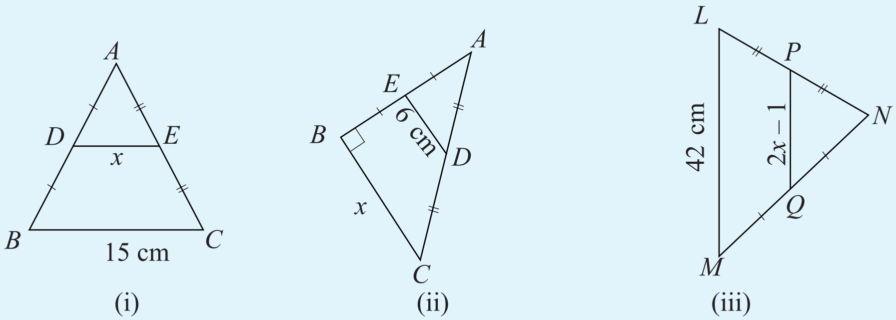
$= 12 + 6 + 6 + 6$

$= 30$

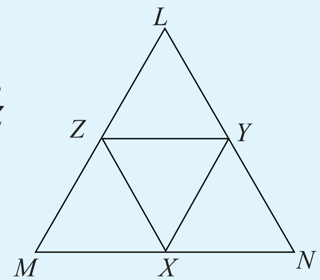
$\therefore$ நாற்பக்கல் $BCYX$ இன் சுற்றளவு 30 cm ஆகும்.

பயிற்சி 11.1

1. ஒவ்வோர் உருவிலும் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் X, Y, Z ஆகியன MN, NL, LM ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகும். $MN = 8$ cm, $NL = 10$ cm, $LM = 12$ cm எனின், முக்கோணி XYZ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

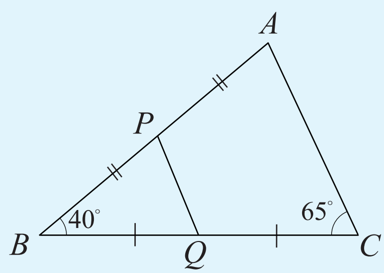


3. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $AC = 15$ cm, $BD = 10$ cm ஆகும். AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாற்பக்கலின் சுற்றளவைக் காண்க.

4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து

(i) முக்கோணி ABC யில் $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, சுற்றளவு 24cm எனின், நாற்பக்கல் $PQCA$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

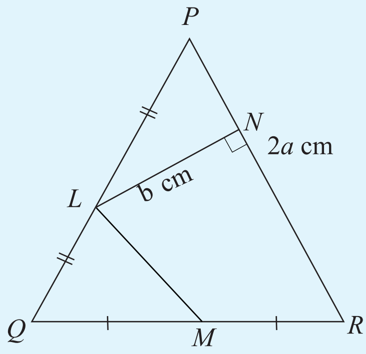
(ii) $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{C} = 65^\circ$ ஆயின் நாற்பக்கல் $PQCA$ யின் எஞ்சிய கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



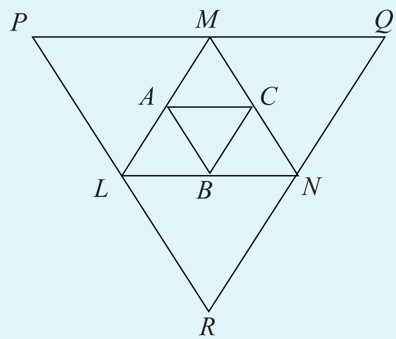
5. உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இல் QR, QP ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே M, L ஆகும். $QR + QP = 16$ cm, $PR = 2a$ cm, $LN = b$ cm, $L\hat{N}R = 90^\circ$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) நாற்பக்கல் $LMRP$ யின் சுற்றளவை a இன் சார்பில் காண்க.

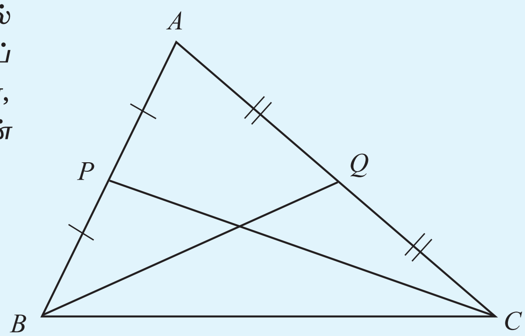
(ii) $LMRP$ இன் பரப்பளவை a, b ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.



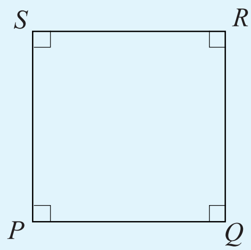
6. உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இன் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகிய M, N, L ஆகிவற்றைத் தொடுப்பதன் மூலம் முக்கோணி LMN உம் அதன் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகிய C, B, A ஆகியவற்றைத் தொடுப்பதன் மூலம் முக்கோணி CBA யும் பெறப்பட்டுள்ளன. முக்கோணி PQR இன் சுற்றளவு 12 cm எனின், முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவைக் காண்க.



7. உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q எனின், PBC, BQC ஆகிய முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகள் சமனெனக் காட்டுக.

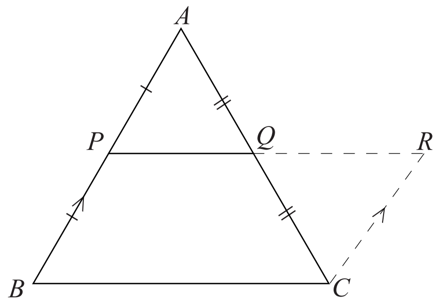


8. உருவில் சதுரம் $PQRS$ இன் சுற்றளவு 60 cm ஆகும். அதன் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாற்பக்கலின் சுற்றளவை சேடு வடிவில் தருக.



11.2 நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் நிறுவல்

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தை முறைமையாக நிறுவும் முறை பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.



தரவு: முக்கோணி ABC யில் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆகும்.

நி. வே. : $PQ // BC$, $PQ = \frac{1}{2} BC$

அமைப்பு: BP யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரைந்த கோடு நீட்டிய PQ ஐ R இல் சந்திக்கின்றது.

நிறுவல்:

APQ, QCR ஆகிய இரு முக்கோணிகளிலும்

$AQ = QC$ (AC இன் நடுப் புள்ளி Q ஆகையால்)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ ($AP // RC$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் ஆகையால்)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$\therefore \Delta APQ \equiv \Delta QCR$ (கோ. கோ. ப.)

$\therefore AP = RC$, $PQ = QR$ (ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள்)

ஆனால் $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

இதற்கேற்ப நாற்பக்கல் $BCRP$ இல் $PB = RC$, $PB // RC$

$\therefore BCRP$ ஓர் இணைகரம் ஆகும். (ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கம் சமனும் சமாந்தரமும்)

$\therefore PR = BC$, $PR // BC$ ஆகும்.

ஆனால் $PQ = QR$ (ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள்)

$\therefore \quad PQ = \frac{1}{2} PR$

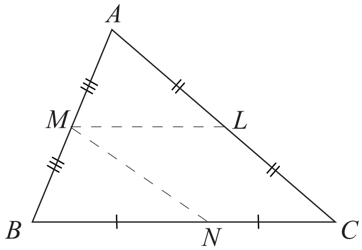
$= \frac{1}{2} BC$ ($PR = BC$ ஆகையால்)

$\therefore PQ // BC$, $PQ = \frac{1}{2} BC$ ஆகும்.

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவும் விதம் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே M, N, L ஆகும். $NCLM$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.



நடுப்புள்ளித் தேற்றத்திற்கேற்ப $ML = \frac{1}{2} BC$

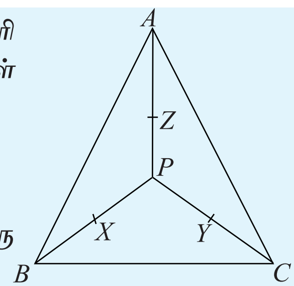
$= NC$ (N ஆனது BC யின் நடுப்புள்ளியாகையால்)

$ML // BC$ ஆகும்

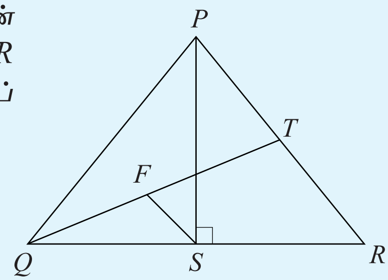
ஆகவே நாற்பக்கல் $NCLM$ இன் ஒரு எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமனும் சமாந்தரமுமாகும். எனவே $NCLM$ ஆனது ஓர் இணைகரமாகும்.

பயிற்சி 11.2

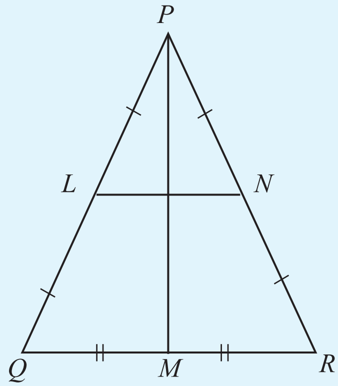
1. P ஆனது முக்கோணி ABC யினுள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளி யாகும். AP, BP , CP ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே Z, X, Y ஆகும்.
   (i) $B\hat{A}C = X\hat{Z}Y$, $A\hat{C}B = Z\hat{Y}X$, $C\hat{B}A = Y\hat{X}Z$ எனக் காட்டுக.
   (ii) $\Delta\ ABC$ யின் சுற்றளவு $\Delta\ XYZ$ இன் சுற்றளவின் இரு மடங்கு எனக் காட்டுக.



2. உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இல் $Q\hat{P}R$ இன் இருகூறாக்கி பக்கம் QR ஐ S இல் $PS \perp QR$ ஆக இருக்குமாறு சந்திக்கின்றது. QT யின் நடுப் புள்ளி F ஆகும். $FS // TR$ எனக் காட்டுக.



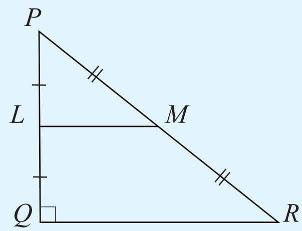
3. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $PM \perp LN$ எனக் காட்டுக.



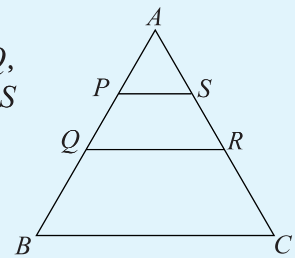
4. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $\Delta PLM \equiv \Delta QLM$ எனக் காட்டுக.

(ii) $LQRM$ இன் பரப்பளவு $= \frac{3}{4}\, \Delta PQR$ இன் பரப்பளவு எனக் காட்டுக.



5. தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யில் AB , AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே Q , R ஆகும். AQ, AR ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, S ஆகும். $4\,PS = BC$ எனக் காட்டுக.



6. (i) எந்த ஒரு நாற்பக்கலின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

(ii) எந்த ஒரு செவ்வகத்தின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போதும் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

(iii) எந்த ஒரு சதுரத்தின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போதும் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஒரு சதுரம் என நிறுவுக.

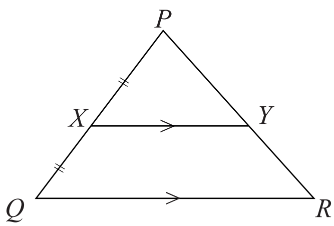
(iv) எந்த ஒரு சாய்சதுரத்தின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போதும் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் ஒரு செவ்வகமென நிறுவுக.

11.3 நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலை

இப்போது நடுப்புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலை பற்றி ஆராய்வோம்.

தேற்றம்

ஒரு முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக மற்றுமொரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோட்டினால் மூன்றாம் பக்கம் இறுசமகூறிடப்படுகின்றது.



உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இல் X ஆனது PQ வின் நடுப் புள்ளி (அதாவது $PX = XQ$) ஆகும். $XY \parallel QR$ ஆகவும் இருப்பின், நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப Y ஆனது PR இன் நடுப்புள்ளியாகும். அதாவது $PY = YR$ ஆகும்.

இத்தேற்றத்தை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்வோம்.

செயற்பாடு 2

- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm , $RP = 7$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ வரைக.
- பக்கம் PQ வின் நடுப்புள்ளியை X எனக் குறிக்க.
- X இனூடாக QR இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு பக்கம் PR ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை Y எனப் பெயரிடுக.
- PY, YR ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளந்து PY, YR ஆகியவற்றின் நீளங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை எழுதுக.
- இவ்வாறு X இனூடாகப் பக்கம் PR இற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டை வரைந்து அக்கோடு பக்கம் QR ஐ இடை வெட்டும் புள்ளியை Z எனப் பெயரிடுக. QZ , ZR ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப $PY = YR$ எனவும் $QZ = ZR$ எனவும் கண்டுள்ளீர்கள். அதாவது ஒரு முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக வேறொரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோட்டினால் மூன்றாவது பக்கம் இறுசமகூறிடப்படுகின்றது என்பதை நீங்கள் உறுதிப்படுத்துவீர்கள்.

இப்போது நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலையின் சில பிரயோகங்களை உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

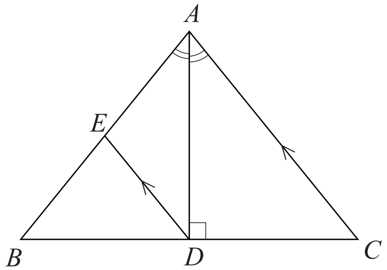
உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் $B\hat{A}C$ யின் இருசமகூறாக்கி பக்கம் BC யை D யில் சந்திக்கின்றது. $A\hat{D}B = 90^\circ$ ஆகும். D யினூடாக CA யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு பக்கம் AB யை E யில் சந்திக்கின்றது.

(i) $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ எனவும்

(ii) $BE = EA$ எனவும்

காட்டுக.



(i) ADB, ADC ஆகிய முக்கோணிகளில்

$B\hat{A}D = C\hat{A}D$ ($B\hat{A}C$ யின் இருசமகூறாக்கி AD என்பதால்)

பக்கம் AD ஆனது பொதுப் பக்கமாகும்.

$A\hat{D}B = A\hat{D}C$ ($AD \perp BC$)

$\therefore$ $\Delta ADB \equiv \Delta ADC$ (கோ.கோ.ப.)

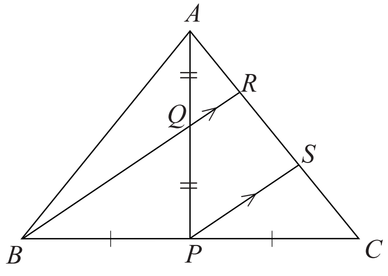
(ii) $BD = DC$ (ADB, ADC ஆகிய ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள்)

$BD = DC$, $AC // DE$ ஆகையால்

நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப முக்கோணி BAC யில்

$BE = EA$

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி P யும் கோடு AP யின் நடுப்புள்ளி Q வும் ஆகும். நீட்டிய கோடு BQ ஆனது பக்கம் AC யை R இற் சந்திக்கின்றது. BR இற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு AC யை S இற் சந்திக்கின்றது. $AC = 15$ cm எனின், AS இன் நீளத்தைக் காண்க.

முக்கோணி APS இல் $AQ = QP$, $QR//PS$ ஆகும்.
ஆகவே, நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப

$AR = RS$ ——— ①

முக்கோணி BRC யில்

$BP = PC$, $BR//PS$ ஆகும்.

ஆகவே, நடுப் புள்ளித் தேற்றத்தின் மறுதலைக்கேற்ப

$RS = SC$ ——— ②

① , ② ஆகியவற்றுக்கேற்ப $AR = RS = SC$ ஆகும்.

$$\therefore\ AS = \frac{2}{3}AC$$

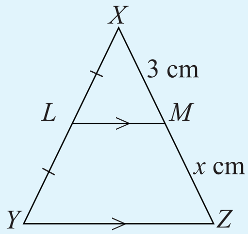
$$= \frac{2}{3} \times 15$$

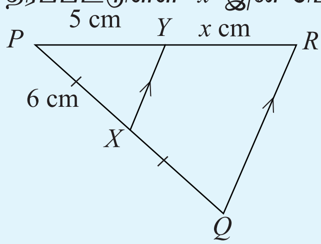
$$= 10$$

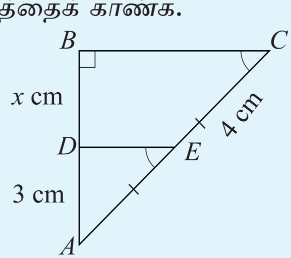
எனவே, AS இன் நீளம் 10 cm ஆகும்.

பயிற்சி 11.3

1. ஒவ்வோர் உருவிலும் தரப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.





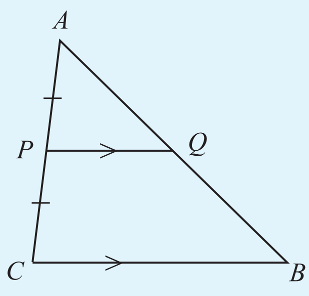


2. AC யின் நடுப் புள்ளி P ஆகவும் $BC = 12$ cm, $AB = 15$ cm, $PQ//CB$ ஆகவும் இருப்பின்,

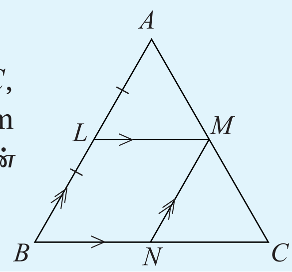
(i) QB இன் நீளம்

(ii) PQ இன் நீளம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.



3. உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யின் நடுப்புள்ளி L ஆக இருக்கும் அதே வேளை $LM//BC$, $MN//AB$ ஆகும். $AB = 10$ cm , $AM = 7$ cm , $BC = 12$ cm எனின், MC யின் நீளத்தையும் நாற்பக்கல் $BNML$ இன் சுற்றளவையும் காண்க.

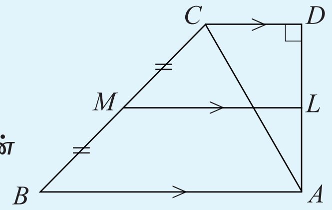


4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து $AC = 10$ cm, $AD = 8$ cm எனின்,

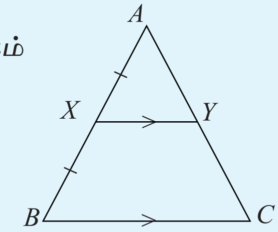
(i) DC யின் நீளம்

(ii) $ML = 10$ cm எனின் சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு

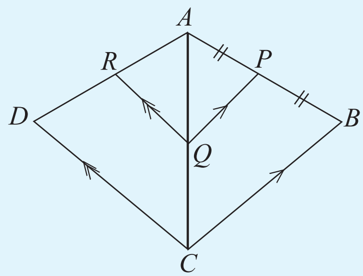
ஆகியவற்றைக் காண்க.



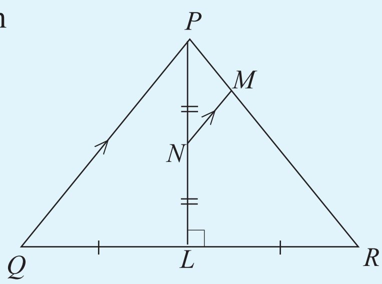
5. உருவில் உள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 30 cm ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து சரிவகம் $BCYX$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



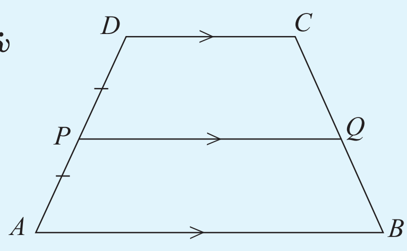
6. உருவில் உள்ள ΔABC, ΔADC சமபக்க முக்கோணிகள் ஆகும். $AB = 20$ cm உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $PQRDCB$ யின் சுற்றளவைக் காண்க.



7. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $PQ = 20$ cm ஆயின் MN இன் நீளத்தைக் காண்க.



8. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப PQ வின் நீளத்தை AB, DC ஆகிய பக்கங்களின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.



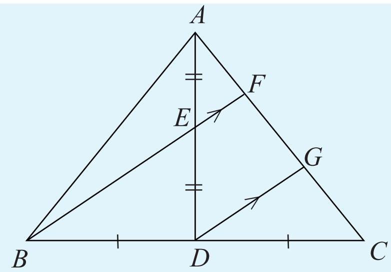
9. உருவிலுள்ள சமபக்க முக்கோணி ABC யின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x cm எனவும், $EF = y$ cm எனவும் கொண்டு குறிக்கப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப.

(i) நாற்பக்கல் $EDGF$ இன் சுற்றளவு

(ii) நாற்பக்கல் $BDGF$ இன் சுற்றளவு

(iii) நாற்பக்கல் $BDGA$ இன் சுற்றளவு

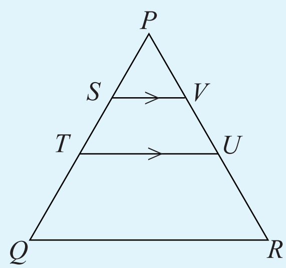
ஆகியவற்றை x, y ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.



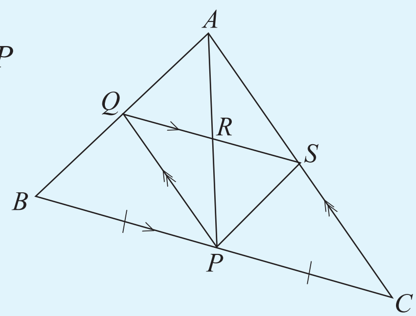
10. தரப்பட்டுள்ள உருவில் PQ வின் நடுப் புள்ளி T உம் PT யின் நடுப் புள்ளி S உம் ஆகும். S, T ஆகியவற்றினூடாக QR இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடுகள் பக்கம் PR ஐ முறையே V, U ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன.

(i) $PV = \frac{1}{4} PR$ எனக் காட்டுக.

(ii) $SV : QR$ ஐக் காண்க.



11. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $AR = RP$ எனவும் $PS // BQ$ எனவும் காட்டுக.



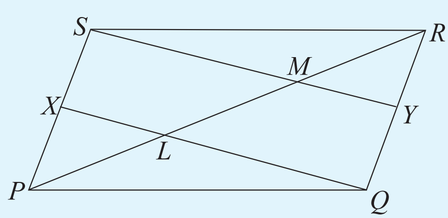
பலவினப் பயிற்சி

1. இணைகரம் $PQRS$ இல் PS , QR ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். XQ, SY ஆகிய கோடுகள் மூலைவிட்டம் PR ஐ முறையே L, M ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன.

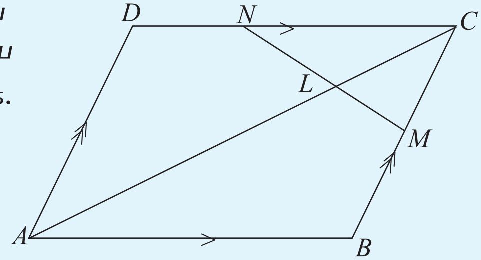
(i) $XQYS$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(ii) $PM = \frac{2}{3} PR$ எனவும்

நிறுவுக.

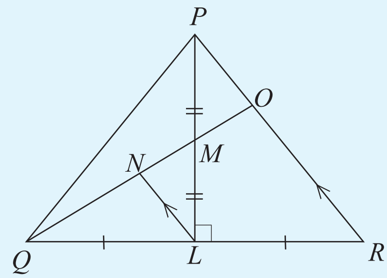


2. இணைகரம் $ABCD$ யில் BC, CD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே M , N ஆகும். $LC=\frac{1}{4}AC$ எனக் காட்டுக.



3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) $QN = NO$ எனவும்
(ii) $\Delta POM \equiv \Delta NLM$ எனவும்
(iii) $PNLO$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
(iv) $MO = \frac{1}{4} QO$ எனவும்
காட்டுக.



4. $PQRS$ ஓர் இணைகரம். மூலைவிட்டங்கள் O வில் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் PQ வின் நடுப்புள்ளி L ஆக இருக்கும் அதே வேளை கோடு LO வின் நடுப் புள்ளி T ஆகும். நீட்டிய கோடு PT யும் கோடு QR உம் Y இல் சந்திக்கின்றன.
(i) $PT = TY$ எனவும்
(ii) $PLYO$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
(iii) $4\ LT = QR$ எனவும்
நிறுவுக.

5. முக்கோணி PQR இல் PQ, PR ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே Y , X ஆகும். QX, YR ஆகிய கோடுகள் L இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. Q வினூடாக YR யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட PL ஐ M இல் சந்திக்கின்றது. LM, QR ஆகிய கோடுகள் N இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $PL = LM$ எனக் காட்டுக.

(ii) $MR//QX$ எனக் காட்டுக.

(iii) $QMRL$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

(iv) $\frac{PL}{PN}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

12 வரைபுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை வரைபின் மூலம் பெற்றுக் கொள்ளவும்
- $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான இருபடிச் சார்புகளின் வரைபுகளை வரையவும்
- வரைபிலிருந்து சார்பின் நடத்தையை விளக்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வரைபுகள் வரைவது தொடர்பாகக் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. ***a.*** x இற்கான தெரிவுசெய்யப்பட்ட மூன்று பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களைக் கணித்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நேர்கோட்டையும் பொருத்தமான ஒரு ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

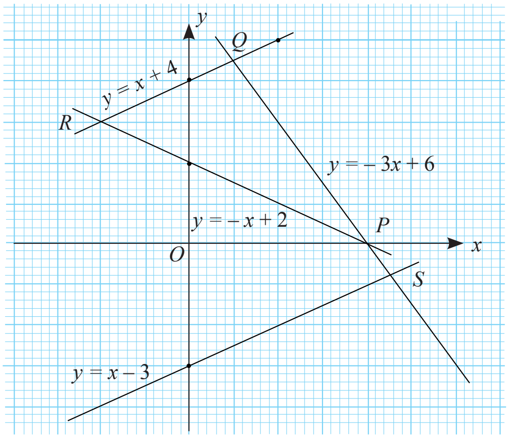
(i) $y = x + 1$ (ii) $y - x = 5$ (iii) $2y = -x - 4$ (iv) $3x + 2y = 6$

b. மேலே வரைந்த ஒவ்வொரு நேர்கோடும் அச்சுகளைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நேர்கோட்டின் எதிரேயும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஆள்கூறுகளிலிருந்து நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்ற ஆள்கூறுகளைத் தெரிந்து எழுதுக.

(i) $y = 2x - 3$; (1, 1), (0, 3), (2, 1) (ii) $y = 2x - 3$; (0, – 3), $(\frac{1}{2}, 4)$, (1, 3)

3. ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தில் வரையப்பட்ட நான்கு நேர்கோடுகளின் பருமட்டான வரைபுகள் இங்கு தரப்பட்டுள்ளன. கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் P, Q, R, S என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைத் தரப்பட்டுள்ள ஆள்கூறுகளிலிருந்து தெரிந்து எழுதுக. உமது விடைக்கான காரணங்களைத் தருக.



$(-3, 5), (-1, 3), (-1, -3)$

$(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}),\ (2, 0),\ (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}),$

$(2\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$

12.1 வரைபின் மூலம் ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்குத் தெரியாக் கணியங்களின் பெறுமானத்தைக் காணும் அட்சரகணிதமுறை பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆயினும் இங்கு அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்தாது கீழே விவரிக்கப்படும் முறையில் ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை வரைபின் மூலம் வகைகுறித்துத் தீர்வுகளை பெற்றுக் கொள்ளும் முறையின் மீது கவனம் செலுத்தப்படுகின்றது.

இங்கு தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியை பற்றிக் கவனத்தைச் செலுத்துக.

$$y - x = -3$$
$$y + 3x = 5$$

முதலில் அட்சரகணித முறையில் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியைத் தீர்ப்போம்.

$$y - x = -3 \text{ ——— } ①$$
$$y + 3x = 5 \text{ ——— } ②$$

② – ① இலிருந்து $(y + 3x) - (y - x) = 5 - (-3)$

$$y + 3x - y + x = 5 + 3$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

$x = 2$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$y - 2 = -3$$
$$\therefore \quad y = -3 + 2$$
$$y = -1$$

∴ தீர்வுகள்

$x = 2,\ y = -1$

இச்சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைக் கருதும்போது $y = x - 3,\ y = -3x + 5$ என்னும் வடிவில் இரண்டு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளில் y ஐ எழுவாயாக்கி எழுதமுடியும்.

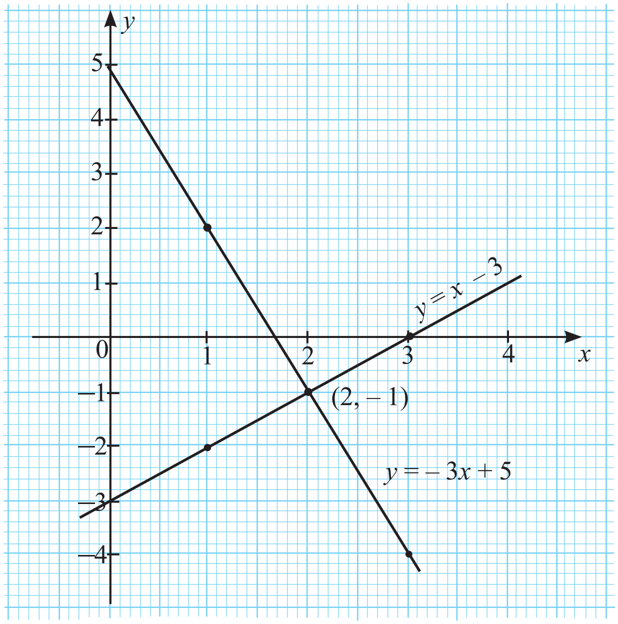
முதலில் இச்சமன்பாடுகளினால் தரப்படும் இரண்டு நேர்கோடுகளையும் ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைவோம். அதற்கெனத் தயாரிக்கப்பட்ட இரண்டு பெறுமான அட்டவணைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$y = x - 3$

x	1	2	3
y	-2	-1	0

$y = -3x + 5$

x	1	2	3
y	2	-1	-4



ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் மேற்குறித்த புள்ளிகளின் தொடையைக் குறித்த பின்னர் பெறப்படும் நேர்கோட்டுச் சோடியானது $(2, -1)$ என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. இப்புள்ளியின் x, y பெறுமானங்களை மேற்குறித்த சமன்பாட்டுச் சோடியில் பிரதியிடும்போது சமன்பாட்டுச் சோடியின் இரு பக்கமும் சமனாவதை அவதானிக்க முடிகின்றது. அதாவது இவ்வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை $x = 2$, $y = -1$ என்னும் பெறுமானங்கள் மேற்குறித்த ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகள் என்பது தெளிவாகின்றது. மேற்படி தீர்வுகள் சமன்பாட்டுச் சோடியை அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்ப்பதால் பெறப்பட்ட விடையுடன் சமனாவதால் சமன்பாட்டுச் சோடியின் கேத்திரகணிதத் தீர்வு மேலும் உறுதிப்படுத்தப்படுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

இதற்கேற்ப இரண்டு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கேத்திரகணிதரீதியில் காண்பதற்காக நாம் செய்யவேண்டியது அச்சமன்பாடுகளின் நேர்கோட்டுச் சோடியை ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைந்து அவற்றின் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்பதாகும். அப்போது x – ஆள்கூற்றின் மூலம் x இன் பெறுமானமும் y – ஆள்கூற்றின் மூலம் y இன் பெறுமானமும் தீர்வுகளாகப் பெறப்படும்.

கீழேயுள்ள உதாரணத்தில் ஓர் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியை உருவாக்கி அவற்றை கேத்திரகணிதரீதியில் தீர்க்கும் முறை பற்றி ஆராயப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

ஒருவர் தபாற் கந்தோரில் ரூ. 10, ரூ. 20 ஆகிய பெறுமதிகளைக் கொண்ட 10 முத்திரைகளை வாங்கினார். வாங்கிய முத்திரைகளின் மொத்தப் பெறுமதி ரூ. 120 ஆகும்.

(i) வாங்கிய ரூ. 10 முத்திரைகளின் எண்ணிக்கையை x எனவும் ரூ.20 முத்திரைகளின் எண்ணிக்கையை y எனவும் கொண்டு ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியொன்றை உருவாக்குக.

(ii) மேற்படி சமன்பாடுகளை வரைபுகளைக் கொண்டு தீர்த்து வாங்கிய ரூ. 10, ரூ. 20 பெறுமதியான முத்திரைகளின் எண்ணிக்கைகளை தனித்தனியே காண்க.

உரிய ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியைப் பின்வரும் முறையில் உருவாக்கிக் கொள்ளலாம்.

$$x + y = 10 \quad \text{——— ①}$$
$$10x + 20y = 120 \quad \text{——— ②}$$

மேற்குறித்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் வரைபில் காட்டுவோம்.

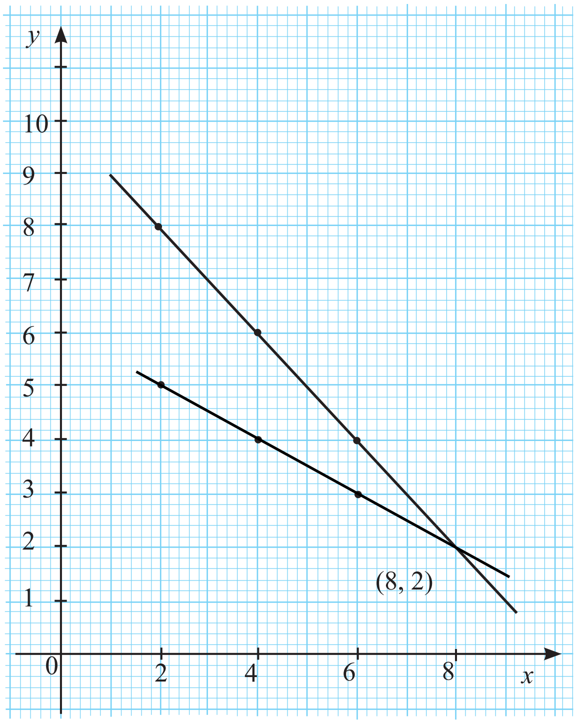
$x + y = 10$ ஆகவும், $y = -x + 10$

x	2	4	6
y	8	6	4

$10x + 20y = 120$ ஆகவும், $y = -\frac{1}{2}x + 6$

x	2	4	6
y	5	4	3

இப்போது கீழே காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கோட்டுச் சோடி ஒன்று பெறப்படும்.



$x + y = 10$, $10x + 20y = 120$ என்பவற்றின் மூலம் குறிப்பிடப்படும் சமன்பாட்டுச் சோடியை வரைபு படுத்தும்போது அவை (8, 2) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. அப்போது உரிய சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகள் $x = 8$, $y = 2$ ஆகும். அதாவது அவர் வாங்கிய ரூ. 10 பெறுமதியான முத்திரைகளின் எண்ணிக்கை 8 உம் ரூ. 20 பெறுமதியான முத்திரைகளின் எண்ணிக்கை 2 உம் ஆகும்.

பயிற்சி 12.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டு சோடியையும் வரைபுபடுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க. அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்தி அச்சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து விடைகளை உறுதிப்படுத்துக.

   a. $y - x = 4$
   $y - 2x = 3$

   b. $y = -2x - 2$
   $-2y = -x - 6$

   c. $3x - 4y = 7$
   $5x + 2y = 3$

2. குறித்த ஒரு பாடசாலையில் தரம் 11 இல் A, B என இரண்டு வகுப்புகள் உள்ளன. வகுப்பு A இலிருந்து ஐந்து பிள்ளைகள் வகுப்பு B இற்குச் சென்றதால் வகுப்பு A இலுள்ள மாணவர் தொகையின் இரு மடங்கினர் வகுப்பு B யில் இருப்பர். வகுப்பு B யிலிருந்து 5 பிள்ளைகள் வகுப்பு A இற்குச் சென்றால் இரண்டு வகுப்புக்களிலும் சம எண்ணிக்கையிலான மாணவர்கள் இருப்பர்.
   (i) வகுப்பு A யிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை x எனவும் வகுப்பு B யிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை y எனவும் கொண்டு ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடி ஒன்றை உருவாக்குக.
   (ii) மேற்குறித்த சமன்பாட்டுச் சோடியை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைபுபடுத்தி அதிலிருந்து இரண்டு வகுப்புக்களிலும் இருந்த பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கைகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

இருபடிச் சார்புகளின் வரைபுகள்

$y = ax^2$, $y = ax^2 + b$ ஆகிய வடிவங்களிலான இருபடி சார்புகளின் வரைபுகள் தொடர்பாகக் கற்ற விடயங்களை மீண்டும் நினைவுகூர்வதற்கு கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. $y = x^2 - 5$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காகப் பெறப்பட்ட x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை உள்ளடக்கிய பூரணமற்ற பெறுமான அட்டவணையொன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	___	-4	-5	___	-1	4

a. (i) மேலேயுள்ள அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.
(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

b. வரைந்த வரைபைப் பயன்படுத்தி
(i) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்
(ii) வரைபின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(iii) சார்பின் பெறுமானம் மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(iv) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(v) $y = -1$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்கள்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. (i) $y = -2x^2 + 4$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பூரணமற்ற பெறுமான அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-14	___	2	4	2	-4	-14

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

வரைந்த வரைபைப் பயன்படுத்தி

(iii) சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(iv) சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

(v) சார்பு மறையாகக் குறைந்து செல்லும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(vi) $y \leq 2$ ஆகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

(vii) $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானத்தை முதலாம் தசமதானத்திற்குக் காண்க.

3. ஒவ்வொரு சார்பின் மூலமும் தரப்படும் வரைபுகளை வரையாது பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

சார்பு	திரும்பற் புள்ளியின் தன்மை (உயர்வு/இழிவு)	சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு	உயர்வு/ இழிவு பெறுமானம்	திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(i) $y = 2x^2$	....	....	....	....
(ii) $y = \frac{1}{2}x^2$	....	....	....	....
(iii) $y = x^2 + 3$	....	....	....	....
(iv) $y = 1 - 2x^2$	உயர்வு	$x = 0$	1	(0, 1)
(v) $y = -3x^2 - 4$	....	....	....	....
(vi) $y = \frac{3}{2}x^2 - 2$	....	....	....	....

12.2 $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபு

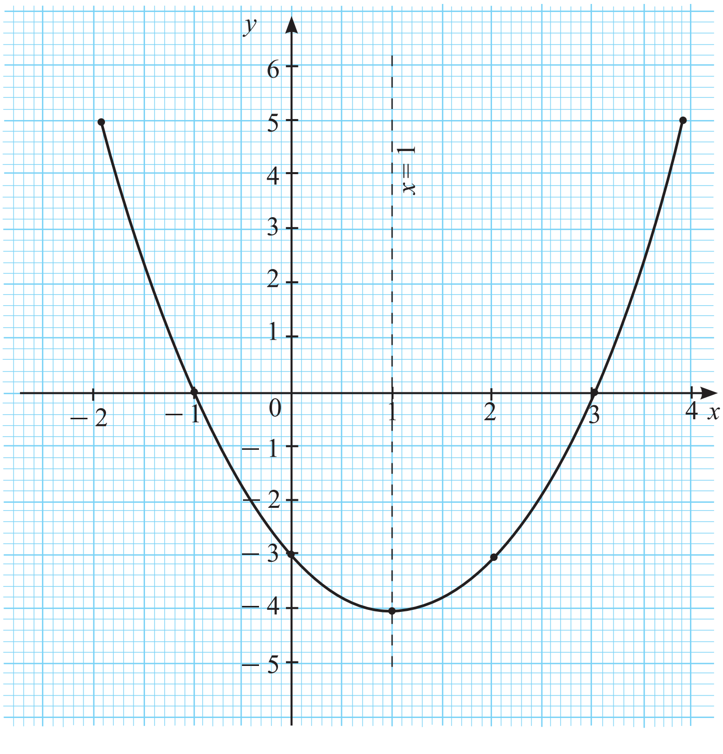
$y = ax^2 + b$ என்னும் வடிலான ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு தொடர்பாகக் கற்ற பண்புகளின் அறிவைப் பயன்படுத்தி $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு தொடர்பான பண்புகளைக் கற்பதற்காக மேலதிக கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

$a > 0$ ஆகும்போது $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான வரைபை வரைதலும் அதன் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளுதலும்

சில அடிப்படை பண்புகளை அறிந்துகொள்வதற்காக முதலில் $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவோம். அதற்காக $-2 \leq x \leq 4$ என்னும் வீச்சில் y இன் பெறுமானங்களைப் பெற்றுக்கொள்வதற்காக பின்வருமாறு ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5
(x, y)	$(-2, 5)$	$(-1, 0)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -3)$	$(3, 0)$	$(4, 5)$

மேற்குறித்த வரைபை வரைவதற்கு முன்னர் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களின் வீச்சுப் பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்றுக்கொண்டு அதற்கேற்ப x அச்சு வழியே 10 சிறிய கட்டங்களினால் ஓர் அலகும் y அச்சு வழியே 10 சிறிய கட்டங்களினால் இரண்டு அலகுகளும் குறிக்கப்படும் வகையில் அளவிடையை எடுத்து ஆள்கூற்றுத் தளத்தை வரைந்து $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவது இலகுவானதாகும்.



$y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபை பரவளையி என்போம். வரையப்பட்ட வரைபிலிருந்து பின்வரும் பண்புகளை அவதானிக்க முடியும்.

- வரைபானது ஒரு பரவளைவாக இருப்பதுடன் அது கோடு $x = 1$ பற்றிச் சமச்சீரானது. அதற்கேற்ப வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = 1$ ஆகும்.

வரைபில் x இன் பெறுமானம் -2 இலிருந்து முறையே அதிகரிக்கும்போது அதற்கு ஒத்த y யின் பெறுமானம் முறையே குறைந்து இழிவுப் பெறுமானமாகிய -4 ஐ எடுத்து மீண்டும் அதிகரிக்கின்றது.

மேற்குறித்த வரைபில் x இன் பெறுமான வீச்சினுள் y யின் நடத்தையை மேலும் விபரமாக விளங்கிக் கொள்வோம்.

- x இன் பெறுமானம் -1 வரை அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் அல்லது சார்பின் பெறுமானம் 0 (பூச்சியம்) வரை நேராகக் குறைகின்றது. இங்கு "நேராகக் குறைகின்றது" என்பதன் கருத்து சார்பின் பெறுமானமானது நேர் பெறுமானமாகவே குறைகின்றது என்பதாகும்.
- x இன் பெறுமானம் -1 ஆகும்போது சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் -1 இலிருந்து 1 வரை அதிகரிக்கும்போது அதற்கு ஒத்ததாக y இன் பெறுமானம் 0 இலிருந்து -4 வரை மறையாகக் குறைகின்றது.
- x இன் பெறுமானம் 1 இலிருந்து 3 வரை அதிகரிக்கும்போது அதற்கு ஒத்ததாக y இன் பெறுமானம் -4 இலிருந்து 0 வரை மறையாக அதிகரிக்கின்றது.
- x இன் பெறுமானம் 3 ஆகும்போது y இன் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் 3 இலிருந்து அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் 0 இலிருந்து நேராக அதிகரிக்கின்றது.

மேலேயுள்ள பண்புகளைக் கவனத்தில் கொள்வதன் மூலம்,

- சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சை சமனிலியாக $-1 < x < 3$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம்.
- x இன் பெறுமானம் -1 இலும் குறைவாக அல்லது x இன் பெறுமானம் 3 இலும் அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் நேராகும். அதாவது சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு $x < -1$, $x > 3$ ஆகும்.

இதற்கு மேலதிகமாக பின்வரும் விடயங்கள் பற்றியும் கவனம் செலுத்துக.

- இங்கு வரைந்த வரைபுக்கும் தரப்பட்டுள்ள $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்புக்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பை விளங்கிக் கொள்வது மிக முக்கியமானதாகும். அதனை இவ்வாறு விபரிக்கலாம்.

1. வரைபின் மீது எந்தவொரு புள்ளியை (a, b) எடுப்பினும் அது $y = x^2 - 2x - 3$ என்னும் சார்பை $x = a$, $y = b$ என்பவற்றின் மூலம் திருப்தி செய்யும் அதாவது $b = a^2 - 2a - 3$ என்னும் சமன்பாடு உண்மையாகும்.
2. மறுதலையாக, யாதேனுமொரு (a, b) ஆள்கூறின் மூலம் சமன்பாடு $y = x^2 - 2x - 3$ திருப்தி செய்யப்படுமாயின் அப்போது (a, b) புள்ளியானது வரைபின் மீது அமையும்.

இவை இரண்டையும் எப்போதும் நினைவில் வைத்திருப்பது முக்கியமானதாகும். $(-1, 0)$ என்னும் புள்ளியானது வரைபின் மீது அமைகின்றது எனத் தெரிகின்றது. எனவே $y = x^2 - 2x - 3$ ஆனது $x = -1$, $y = 0$ இன் மூலம் திருப்திசெய்யப்பட வேண்டும். (மேலேயுள்ள விபரங்களின் படி). அதாவது, $0 = (-1)^2 - 2(-1) - 3$ ஆக வேண்டும். அது உண்மையாகின்றது என்பது சுருக்குதல் மூலம் தெரிகின்றது.

வேறு விதமாக கூறுவதாயின் $x = -1$ என்பது $x^2 - 2x - 3 = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும். இவ்வாறான ஒரு நியாயித்தல் மூலம் $x = 3$ உம் இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகின்றது எனக் கூறலாம். இன்னுமொரு விதமாகக் கூறுவதாயின் சமன்பாடு $x^2 - 2x - 3 = 0$ இன் மூலங்களாவன வரைபு $y = x^2 - 2x - 3$ ஆனது $x-$ அச்சைவெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளாகும். இதனை மேலும் பொதுவாக இவ்வாறும் எழுதலாம். சார்பு $y = ax^2 + bx + c$ இன் வரைபானது $x-$அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளாவன இருப்படிச் சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகும்.

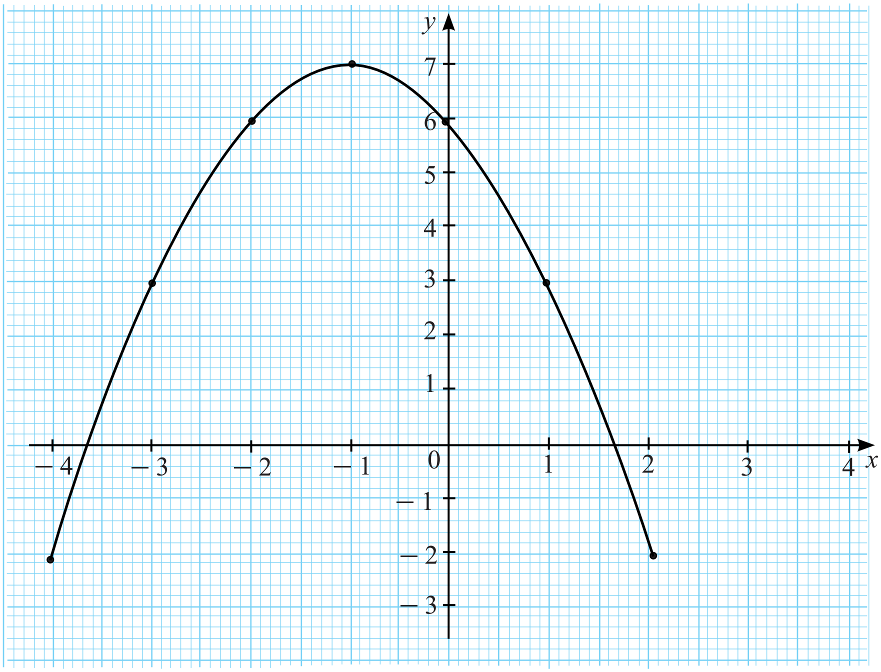
- மேற்குறித்த வரைபின் திரும்பற் புள்ளியில் சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் பெறப்படும். இழிவுப் பெறுமானம் -4 ஆகும். திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(1, -4)$ ஆகும்.

$a < 0$ ஆகும்போது $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவிலான வரைபை வரைதலும் அதன் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளலும்

$y = -x^2 - 2x + 6$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு $-4 \leq x \leq 2$ என்னும் வீச்சில் ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$-x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4
$-2x$	8	6	4	2	0	-2	-4
$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$
y	-2	3	6	7	6	3	-2
(x, y)	$(-4, -2)$	$(-3, 3)$	$(-2, 6)$	$(-1, 7)$	$(0, 6)$	$(1, 3)$	$(2, -2)$

x, y ஆகியவற்றின் பெறுமான வீச்சு பற்றிக் கவனத்திலெடுத்து x, y அச்சுகள் வழியே 10 சிறிய அலகுகளினால் ஓரலகு குறிப்பிடப்படும் வகையில் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து கீழே தரப்பட்டுள்ள முறையில் வரைபை வரையலாம்.



மேலேயுள்ள வரைபை அவதானித்து பின்வரும் விடயங்களை அறிந்து கொள்ளலாம்.

- உயர்வுப் பெறுமானம் 7 ஆவதுடன் வரைபானது $x = -1$ என்னும் கோடு பற்றிச் சமச்சீருடையது. இதற்கேற்ப வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு $x = -1$ ஆகும்.
- திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(-1, 7)$ ஆகும்.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 வரை அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கின்றது.
- $x = -3.6$ இல் சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 இலிருந்து -1 வரை அதிகரிக்கும்போது y யின் பெறுமானம் 0 இலிருந்து 7 வரை நேராக அதிகரிக்கின்றது.
- x இன் பெறுமானம் -1 இல் சார்பு 7 என்னும் உயர்வுப் பெறுமானத்தை எடுக்கின்றது.
- x இன் பெறுமானம் -1 இலிருந்து $+1.6$ வரை அதிகரிக்கும்போது சார்பின் பெறுமானம் நேராகக் குறைகின்றது.
- $x = +1.6$ இல் சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
- x இன் பெறுமானம் 1.6 இலிருந்து அதிகரிக்கும்போது சார்பின் பெறுமானம் மறையாக குறைகின்றது.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 இற்கும் $+1.6$ இற்கும் இடையில் இருக்கும்போது சார்பின் பெறுமானம் நேராகும். (அதாவது சார்பு நேராகும் x இன் வீச்சு $-3.6 < x < +1.6$) ஆகும்.
- x இன் பெறுமானம் -3.6 இலும் குறைவாகும்போதும் $+1.6$ இலும் அதிகரிக்கும்போதும் சார்பு மறையாகும். (அதாவது சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு $x < -3.6$ உம் $x > 1.6$ உம் ஆகும்.)

- வரைபு கோடு $y = 0$ ஐ (x அச்சு) இடைவெட்டுவது $x = -3.6$, $x = +1.6$ ஆகியவற்றிலாகும் அப்போது $-x^2 - 2x + 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் x பெறுமானங்கள் அல்லது மூலங்கள் $x = -3.6$, $x = +1.6$ ஆகும்.
- $0 \leq x \leq 2$ ஆகவுடைய x இன் பெறுமான வீச்சில் சார்பு எடுக்கும் உயர் பெறுமானம் 6 உம் இழிவுப் பெறுமானம் -2 உம் ஆகும்.

பயிற்சி 12.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள சார்பின் வரைபைப் பொருத்தமான அளவிடையில் தரப்பட்டுள்ள வீச்சில் வரைக.
$y = x^2 + 2x - 7$ $(-4 \leq x \leq 2)$

வரைபிலிருந்து
(a) இழிவுப் பெறுமானம்
(b) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(c) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு
(d) $y = 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்கள்
(e) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(f) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(g) சார்பின் பெறுமானம் நேராகக் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(h) சார்பின் பெறுமானம் மறையாக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு
ஆகிவற்றைக் காண்க.

2. $y = x^2 - 4x + 2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குத் தயாரிக்கப்பட்ட பூரணமற்ற ஒரு பெறுமான அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	___	2	-1	___	-1	2	7

(i) மேலேயுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்தி x அச்சின் வழியே பத்து சிறிய சதுரங்களினால் ஓரலகும் y அச்சின் வழியே பத்து சிறிய சதுரங்களினால் ஓரலகும் குறிக்கப்படும் வகையில் அளவிடையை எடுத்து மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.
(ii) வரைபிலிருந்து
(a) சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(b) இழிவுப் பெறுமானம்
(c) சார்பின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்கள்
(d) $y \leq -1$ ஆகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(e) சமன்பாடு $x^2 - 4x + 2 = 0$ இன் மூலகங்கள்
(f) $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானம் (முதலாம் தசம தானத்தில்)
ஆகியவற்றை எழுதுக.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள சார்பின் வரைபை தரப்பட்டுள்ள பெறுமான வீச்சில் உரிய வரைபைப் பொருத்தமான அளவிடையை எடுத்து வரைக.
$y = -x^2 - 2x + 3\ (-4 \leq x \leq 2)$

வரைபிலிருந்து
(a) உயர்வுப் பெறுமானம்
(b) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(c) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாட்டைத் தருக.
(d) $y = 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்கள்
(e) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(f) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(g) சார்பின் பெறுமானம் நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(h) சார்பின் பெறுமானம் மறையாகக் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. $y = -2x^2 + 3x + 2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கொண்ட பூரணமற்ற அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-2	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	2	3	3.5
y	-12	-3	2	___	3	___	-7	-12

(i) மேலேயுள்ள அட்டவணையில் வெற்றிடங்களை நிரப்பி x அச்சு வழியே 10 சிறிய கட்டங்களினால் ஓரலகும் y அச்சு வழியே பத்து சிறிய கட்டங்களினால் இரு அலகுகளும் குறிக்கப்படும் வகையில் அளவிடையை எடுத்து மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.
(ii) வரைந்த வரைபிலிருந்து
(a) சார்பின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும்
(b) சார்பின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாட்டையும்
(c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலகங்களையும்
(d) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(e) சார்பின் பெறுமானம் -4 ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்
என்பவற்றைத் தருக.

12.3 $y = \pm (x \pm b)^2 + c$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபை வரைதலும் அதன் பண்புகளை அறிந்துகொள்ளுதலும்

$y = \pm (x \pm b)^2 + c$ என்பதன் மூலம் ஓர் இருபடிச் சார்பு தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு இருபடிச் சார்பானது சிறப்பான ஒரு முறையில், அதாவது $y = \pm (x \pm b)^2 + c$ என்னும் வடிவில் எழுதப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறு எழுதியுள்ளபோது சார்பின் வரைபின் சில பண்புகளை வரைபினை வரையாது அறிந்துகொள்ளலாம். கீழேயுள்ள அட்டவணையில் அவ்வாறு அறிந்து கொள்ளக்கூடிய சில பண்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

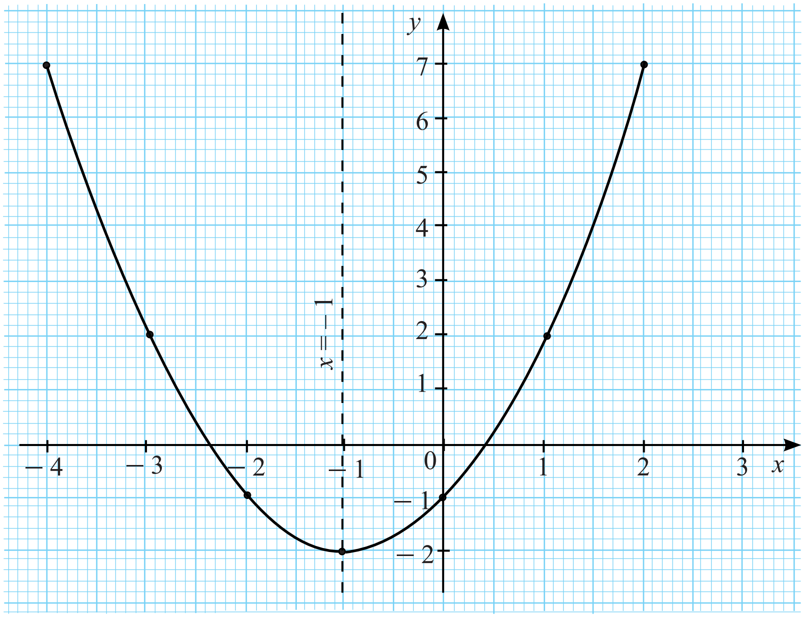
சார்பின் சமன்பாடு	திரும்பற் புள்ளியின் தன்மை	சார்பின் உயர்வு/ இழிவு பெறுமானம்	வரைபின் உயர்வு/ இழிவு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்	வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு	வரைபு y - அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
$y = (x + b)^2 + c$	இழிவு	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, b^2 + c)$
$y = -(x + b)^2 + c$	உயர்வு	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, -b^2 + c)$

மேலேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள பண்புகளை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

$y = (x + 1)^2 - 2$ என்னும் சார்பைக் கருதுவோம். இங்கு $b = 1$ உம் $c = -2$ உம் ஆகும். இச்சார்பின் வரைபை x இன் பெறுமானங்கள் -4 இலிருந்து $+2$ வரையுள்ள பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களைப் பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணை மூலம் கணிப்போம்.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$(x+1)^2$	9	4	1	0	1	4	9
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	7	2	-1	-2	-1	2	7
(x, y)	$(-4, 7)$	$(-3, 2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -2)$	$(0, -1)$	$(1, 2)$	$(2, 7)$

x அச்சின் வழியே 10 சிறிய பிரிவுகளினால் ஓர் அலகும். y அச்சு வழியே 10 சிறிய பிரிவுகளினால் ஓர் அலகும் ஆகுமாறு அளவிடைக்கு மேற்குறித்த சார்பின் வரைபைக் கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு வரையலாம்.



குறிப்பு:

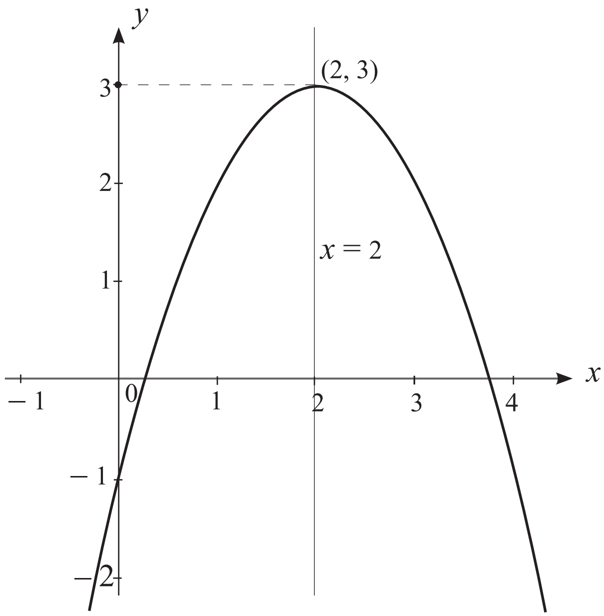
இவ்வரைபுக்கு ஓர் இழிவுப் புள்ளி உண்டு. சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் $-2\ (= c)$ ஆகும். வரைபின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(-1, -2)$ அதாவது $(-b, c)$ ஆவதுடன் சமச்சீர் அச்சு $x = -1$ (அதாவது $x = -b$ ஆகும்.)

ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு $x = \pm(x+b)^2 - c$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளபோது மேற்குறித்த அட்டவணையில் பண்புகளின் அடிப்படையில் வரைபின் பருமட்டான குறிப்பை வரையலாம். கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் அவ்வாறு பருமட்டான ஒரு வரைபை வரையும் முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 1

$y = -\ (x-2)^2 + 3$ என்னும் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

இச்சார்பின் $(x-2)^2$ இன் குணகம் மறை என்பதால் வரைபின் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(2,\ 3)$ ஆகும். சமச்சீர் அச்சு $x = 2$ ஆகும். மேலும் வரைபானது y - அச்சை வெட்டும் இடத்தைக் கண்டுகொள்வதற்காக $y = -\ (x-2)^2 + 3$ இல் $x = 0$ ஐப் பிரதியிடுவோம். அப்போது $y = -(0-2)^2 + 3 = -1$ பெறப்படும் அதற்கேற்ப பின்வருவது போன்ற ஒரு பருமட்டான வரைபை வரையலாம்.



உதாரணம் 2

$y = x^2 + 3x - 4$ என்னும் சார்பின் வரைபில்

(i) வரைபின் தன்மை

(ii) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(iii) உயர்வு/ இழிவுப் பெறுமானம்

(iv) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

ஆகியவற்றைத் தருக.

சார்பு $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளது. முதலில் அதனை $y = (x + b)^2 + c$ என்னும் வடிவில் எழுதுவோம்.

$y = x^2 + 3x - 4$

$y = (x + \frac{3}{2})^2 - 4 - \frac{9}{4}$ $\quad y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

(i) வரைபு பரவளைவானது

(ii) $x = -\frac{3}{2}$ அதாவது $x = -1\frac{1}{2}$

(iii) இழிவுப் பெறுமானம் $-\frac{25}{4}$ ஆகும்.

(iv) $(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$

பயிற்சி 12.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பையும் அதற்கு எதிரே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமான வீச்சில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து வரைக.

(a) $y = (x - 2)^2 - 3 \quad (-1 \leq x \leq 5)$ (b) $y = (x + 3)^2 - 4 \quad (-6 \leq x \leq 0)$

மேலேயுள்ள ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்

(i) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்

(ii) சார்பின் இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(iii) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு

(iv) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(v) $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்

(vi) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

ஆகியவற்றைத் தருக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பையும் அதற்கு எதிரே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமான வீச்சில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து வரைக.

(i) $y = -(x + 2)^2 + 2 \quad (-5 \leq x \leq 1)$ (ii) $y = -(x - 1)^2 + 3 \quad (-2 \leq x \leq 4)$

மேலே வரைந்த ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்

(i) சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம்

(ii) சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(iii) சார்பின் சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு

(iv) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(v) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(vi) $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்

(vii) சார்பு நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சு

(viii) சார்பு மறையாகக் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சு

ஆகியவற்றைத் தருக.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பினதும் பருமட்டான வரைபுகளை வரைக.

(i) $y = (x - 2)^2 - 3$

(ii) $y = 2 - (x + 5)^2$

(iii) $y = x^2 + 6x - 1$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்புக்குமுரிய வரைபை வரையாது சார்பின்

a. தன்மை **b.** சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

c. உயர்வு/இழிவு பெறுமானம் **d.** திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

ஆகியவற்றை எழுதுக.

(i) $y = (x + 2)^2 - 3$ (ii) $y = -(x - 2)^2 + 4$ (iii) $y = -(x - \frac{3}{2})^2 + 1$

(iv) $y = 1\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2$ (v) $y = 3\frac{1}{3} + (x + 2\frac{1}{2})^2$ (vi) $y = (x^2 + 6x + 5)$

12.4 $y = \pm(x \pm a)(x \pm b)$ என்னும் வடிவிலான ஒரு சார்பின் வரைபு

$y = \pm(x \pm a)(x \pm b)$ இன் மூலம் ஓர் இருபடிச் சார்பு தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு இருபடிச் சார்பானது ஒரு சிறப்பு வடிவில், அதாவது $y = \pm(x - a)(x + b)$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளது. அவ்வாறு தரப்பட்டுள்ளபோது சார்பின் வரைபின் சில பண்புகளை முன்னைய பகுதியைப் போன்றே வரைபை வரையாது பெற்றுக் கொள்ளலாம். கீழே அட்டவணையில் அவ்வாறு பெற்றுக் கொள்ளக்கூடிய சில பண்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

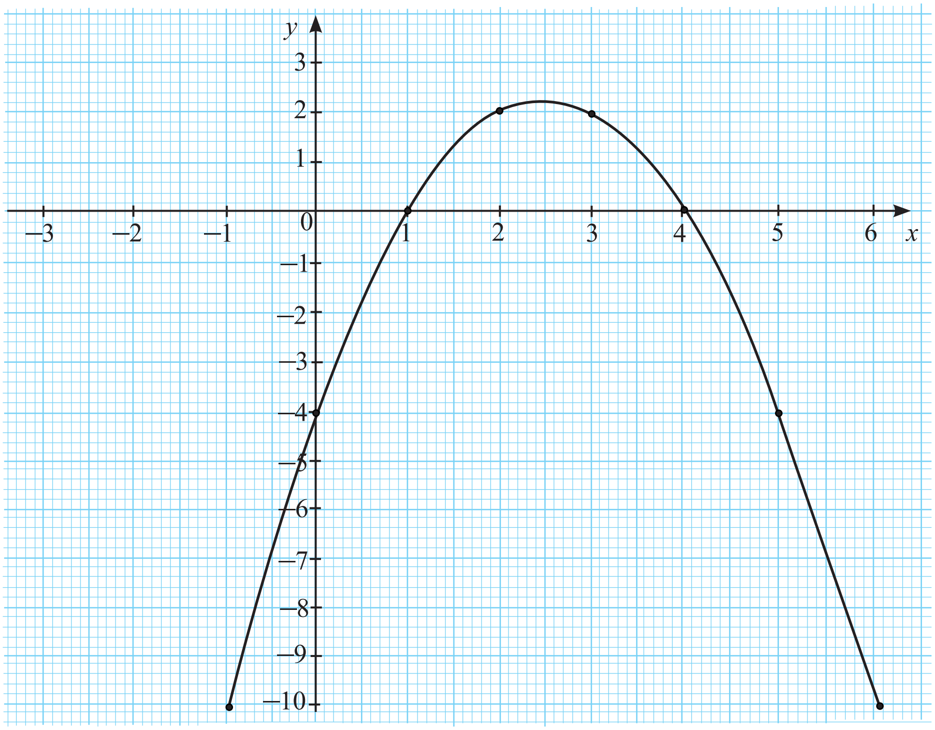
சார்பின் சமன்பாடு	திரும்பற் புள்ளி யின் தன்மை	வரைபின் உயர்வு/ இழிவுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்	வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு	வரைபு x - அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள்	வரைபு y- அச்சை வெட்டும் புள்ளி
$y = (x + a)(x + b)$	இழிவு	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, -\frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\frac{(a+b)}{2}$	$(-a, 0)$, $(-b, 0)$	$(0, ab)$
$y = -(x + a)(x + b)$	உயர்வு	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, \frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\frac{(a+b)}{2}$	$(-a, 0)$, $(-b, 0)$	$(0, -ab)$

மேலே அட்டவணையில் காட்டப்பட்ட பண்புகளை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தைக் கருதவும்.

$y = -(x - 1)(x - 4)$ என்னும் சார்பை நோக்குவோம். அது $y = -(x + a)(x + b)$ வடிவில் அமைந்ததாகும். (இங்கே $a = -1$, $b = -4$ ஆகும்).

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$-(x-1)(x-4)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10
(x, y)	$(-1, -10)$	$(0, -4)$	$(1, 0)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$	$(4, 0)$	$(5, -4)$	$(6, -10)$

x அச்சு வழியே 10 சிறிய அலகுகளை ஓரலகாகவும் y அச்சு வழியே 10 சிறிய அலகுகளை ஓரலகாகவும் அமையும் விதத்தில் மேலேயுள்ள சார்பின் வரைபை கீழே உள்ளவாறு வரையலாம்.



இவ்வரைபானது அட்டவணையில் உள்ள பண்புகளைப் பூர்த்திசெய்கிறது என்பதை மேலே 12.3 இல் உள்ள உதாரணத்தில் போன்று உறுதிப்படுத்திக் கொள்க.

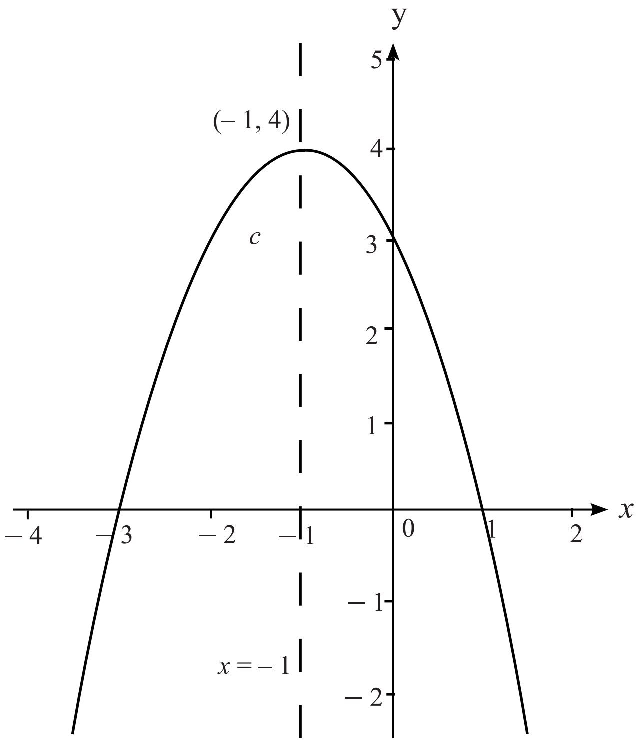
இருபடிச் சார்பின் வரைபு $y = \pm(x+a)(x+b)$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ளபோது மேலே அட்டவணையில் உள்ள பண்புகளைக் கொண்டு வரைபை பருமட்டாக வரையலாம். கீழே உள்ள உதாரணம் அவ்வாறான வரைபைப் பருமட்டாக வரையும் விதத்தை விளக்குகிறது.

உதாரணம் 1

$y = -(x+3)(x-1)$ என்னும் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

இது $a = 3,\ b = -1$ ஆன $y = -(x+a)(x+b)$ வடிவிலான சார்பொன்றாகும். இச்சார்பின் x இன் குணகம் மறையாவதால் வரைபின் திரும்பற் புள்ளி உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டது. $(-3, 0)$ உம் $(1, 0)$ உம் x - அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளாக அமைகின்றன. எனவே உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

$\left(-\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{+(a-b)^2}{4}\right) = (-1, +4)$ ஆகின்றன. இதன்படி கீழே உள்ளவாறு பருமட்டான வரைபை வரையலாம்.



உதாரணம் 2

$y = x^2 + 5x - 14$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரையாது சார்பின்

(i) தன்மை

(ii) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(iii) உயர்வு/இழிவுப் புள்ளி

(iv) திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(v) வரைபு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் என்பவற்றை எழுதுக.

இனி இச்சார்பை $y = (x + a)(x + b)$ வடிவில் எழுதுவோம்.

$y = (x - 2)(x + 7)$ என எழுதலாம்.

(i) சார்பு இழிவுப் பெறுமானத்தையுடைய ஒரு பரவளையாகும்.

(ii) $a = -2,\ b = 7$ உம் என்பதால் சமச்சீரச்சானது,

$$x = -\frac{(a+b)}{2} = -\frac{(-2+7)}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

(iii) இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{-(a-b)^2}{4}$ இன்மூலம் பெறப்படுவதால்

இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{-(-2-7)^2}{4} = -\frac{81}{4}$

(iv) இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(-\frac{5}{2}, -\frac{81}{4})$

(v) வரைபு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(-a, 0)$ உம் $(-b, 0)$ என்பதால் $(2, 0)$, $(-7, 0)$ ஆகும்.

பயிற்சி 12.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பின் வரைபையும் அதற்கு எதிரே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமான வீச்சில் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையை தெரிந்தெடுத்து வரைக.

(a) $y = (x+1)(x+6)$ $(-7 \leq x \leq 0)$
(b) $y = (x-2)(x-5)$ $(0 \leq x \leq 7)$
(c) $y = -(x+1)(x+3)$ $(-5 \leq x \leq 1)$
(d) $y = -(x-5)(x-3)$ $(+1 \leq x \leq 7)$

மேலே வரைந்த ஒவ்வொரு வரைபிலிருந்தும்

(i) y பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்கள்
(ii) சார்பின் சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாடு
(iii) சார்பின் உயர்வு/இழிவுப் பெறுமானம்
(iv) சார்பின் உயர்வு/இழிவுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
(v) சார்பு நேராகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(vi) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான வீச்சு
(vii) தரப்பட்ட x இன் வீச்சில் y இன் தன்மை

ஆகியவற்றை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பினதும் பருமட்டான வரைபை வரைக.

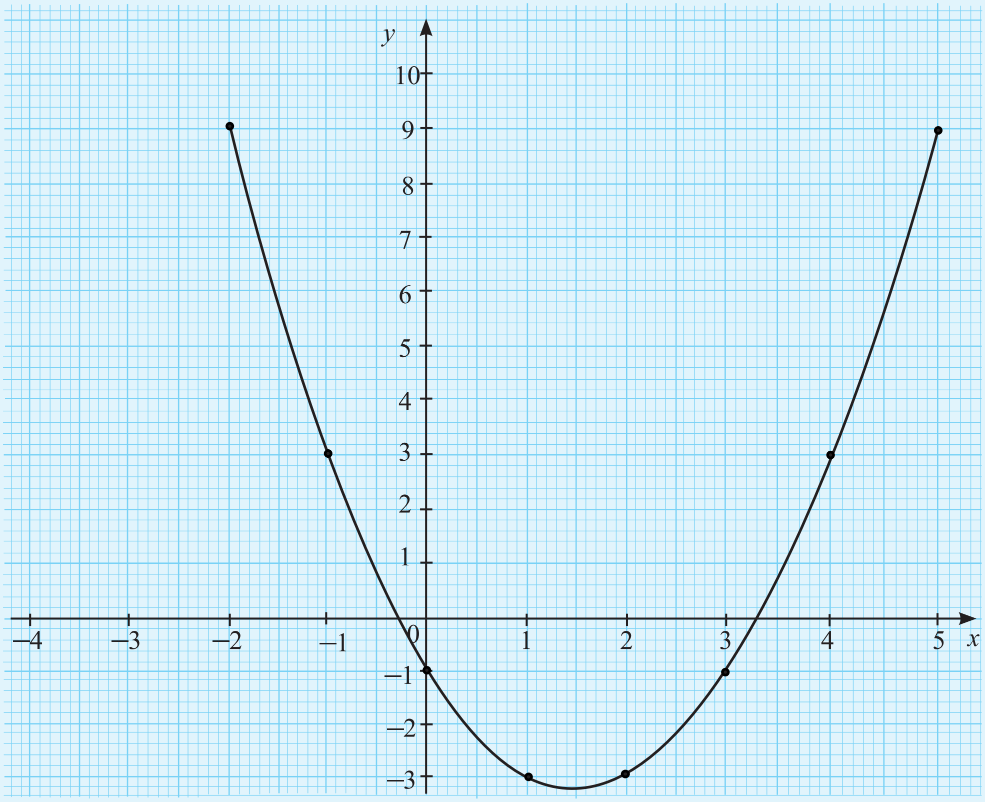
(i) $y = (x-3)(x+5)$
(ii) $y = (x-1)(x-2)$
(iii) $y = -(x+3)(x-6)$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்புகளினதும் வரைபுகளை வரையாது
a. சார்பின் தன்மை **b.** சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு
c. உயர்வு /இழிவுப் புள்ளி **d.** திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
என்பவற்றை எழுதுக.

(i) $y = (x-2)(x+3)$ (ii) $y = (x+1)(x-4)$ (iii) $y = (x-4)(x-1)$
(iv) $y = -(x-\frac{1}{2})(x+3)$ (v) $y = x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ (vi) $y = x^2 - 4x + 7$
(vii) $y = -x^2 - 6x - 5$ (viii) $y = -x^2 + 12x + 35$ (ix) $y = x^2 - x + 4$

பலவினப் பயிற்சி

1. (*a*) $-2 \leq x \leq 5$ என்னும் ஆயிடையில் வரையப்பட்ட ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு உருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



வரைபிலிருந்து

(i) $x = 3$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) சமச்சீர் அச்சை வரைந்து அதன் சமன்பாட்டை எழுதுக.

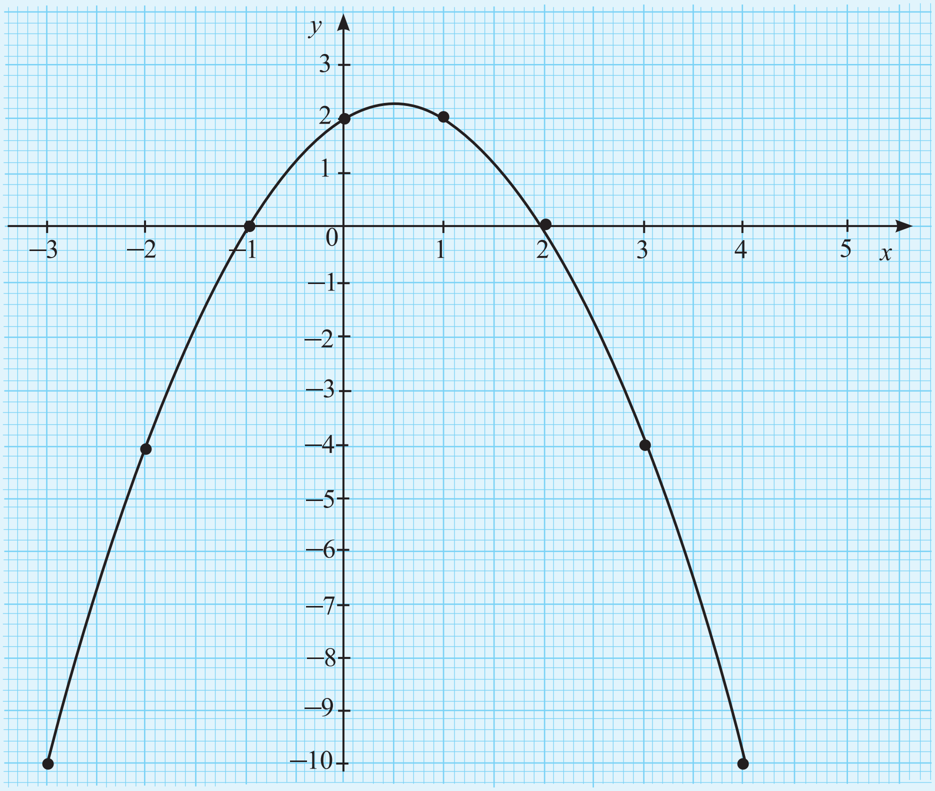
(iii) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(iv) இவ்விருபடிச் சார்பை $y = (x - a)^2 + b$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க முடியுமாயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(v) மேலே (iv) இல் பெற்ற சார்பில் $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

(vi) இச்சார்பின் சமச்சீர் அச்சைக் கொண்டதும் 5 ஐ உயர்வுப் பெறுமானமாகவும் x^2 இன் குணகத்தை 1 ஆகவும் கொண்டதுமான சார்பை எழுதுக.

(*b*) $-3 \leq x \leq 4$ என்னும் ஆயிடையில் தரப்பட்டுள்ள ஓர் இருபடிச் சார்பின் வரைபு உருவில் தரப்பட்டுள்ளது.



(i) $y = 0$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(ii) மேலே (i) இன் விடையிலிருந்து வரைபுக்குரிய இருபடிச் சார்பை $y = -(x - a)(x - b)$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க முடியுமாயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) மேலே (ii) இல் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் இருபடிச் சார்பை $y = -(x - p)^2 + q$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைத்து சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைப் பெற்று அப்பெறுமானங்களை வரைபிலிருந்து உறுதிப்படுத்துக.

(iv) $y \leq -4$ ஆகும்போது x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(v) சார்பின் பெறுமானம் நேராக அதிகரிக்கும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

2. $(x+2)$, $(3-x)$ என்பன இரண்டு எண்களாகும். $y=(x+2)(3-x)$ என்பதனால் அவ்விரு எண்களினதும் பெருக்கம் பெறப்படும்.

(i) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	___	___	6	___	4	___	-6

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) பெருக்கத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iv) பெருக்கத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்திற்குரிய x ஐக் காண்க.

(v) பெருக்கம் பூச்சியமாகும் x இன் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(vi) $y>3$ ஆகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.

(vii) x ஆனது எப்பெறுமான ஆயிடையில் மாறும்போது பெருக்கமானது படிப் படியாக அதிகரிக்கும் எனக் காண்க.

(viii) x எப்பெறுமான ஆயிடையில் பெருக்கத்திற்கான நேர்ப் பெறுமானம் பெறப்படும்.

(ix) $-1 \leq x \leq 3$ என்னும் ஆயிடையில் பெருக்கத்தின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(x) $5 \leq x \leq 8$ என்னும் வீச்சில் பெருக்கத்தில் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $y=(x-2)^2-2$ என்னும் சார்பின் தரப்பட்டுள்ள x இன் சில பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களை உள்ளடக்கிய பூரணமற்ற ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	2	-1	-2	___	2	7

(i) மேலே தரப்பட்ட அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) சார்பின் திரும்பற் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(iv) $y<0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.

(v) வரைபில் இருந்தும் அட்சரகணித முறையிலும் $x^2-4x+2=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலகங்களைக் கண்டு அதிலிருந்து $\sqrt{2}$ இற்கான கிட்டிய பெறுமானத்தைப் பெறுக.

(vi) சார்பின் பெறுமானம் 3 ஆவது x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு என எழுதுக.

4. $y = -(x+1)(x-3)$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கொண்ட பூரணமற்ற ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	___	0	3	4	3	___	-5

(i) $x = -2$ ஆகும்போதும் $x = 3$ ஆகும்போதும் y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.
(iii) சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.
(iv) $y = 0$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்களைப் பெற்று அதிலிருந்து சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைப் பெற்று சரியானதென்பதை உறுதிப்படுத்துக.
(v) $y \geq -1$ ஆகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.
(vi) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை எழுதுக.
(vii) $1 \leq x \leq 4$ என்னும் ஆயிடையில் சார்பின் நடத்தையை விபரிக்க.

5. $y = 5 - x - x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கொண்ட பூரணமற்ற ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	___	-1	3	5	5	___	-1	-7

(i) $x = -4$ உம் $x = 1$ உம் ஆகும்போது y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(ii) பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் மேற்குறித்த வரைபை வரைக.
(iii) சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.
(iv) சார்பின் பெறுமானம் -5 இலிருந்து $+3$ வரை அதிகரிக்கும்போது x இன் பெறுமான ஆயிடையை எழுதுக.
(v) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான ஆயிடையைக் காண்க.
(vi) வரைபிலிருந்து $-x^2 - x + 5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.
(vii) $y - 3 = 5 - x - x^2$ என்னும் சார்பின் உயர்வுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

13 சமன்பாடுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- விகிதமுறும் குணகங்களைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கவும் தீர்க்கவும்
- காரணிப்படுத்துவதன் மூலம், வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம், சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது தொடர்பாக நீங்கள் முன்னர் பெற்றுள்ள அறிவை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $6x + 2y = 1$
$4x - y = 3$

(b) $a + 2b = 3$
$2a + 3b = 4$

(c) $m - 4n = 6$
$3m + 2n = 4$

(d) $9p - 2q = 13$
$7p - 3q = 0$

(e) $2x + 3y = 12$
$3x - 4y = 1$

(f) $3a + 12 = 2b$
$13 + 2a = 3b$

2. குமாரியிடம் இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களும் ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களும் 20 உண்டு. அவற்றின் மொத்தப் பெறுமதி ரூ. 55 ஆகும். குமாரியிடம் உள்ளது ரூ. 2 நாணயங்களின் எண்ணிக்கையை x எனவும் ரூ. 5 நாணயங்களின் எண்ணிக்கை y எனவும் கொண்டு

(i) தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் குறிக்கும் இரண்டு சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(ii) அதிலிருந்து குமாரியிடம் உள்ள ரூ. 2 நாணயங்களினதும் ரூ. 5 நாணயங் களினதும் எண்ணிக்கைகளைக் காண்க.

3. கமலா, விமலா ஆகியோரிடம் குறித்த தொகைப் பணம் உண்டு. கமலாவிடமும் விமலாவிடமும் உள்ள பணத்தின் கூட்டுத்தொகையுடன் ரூ. 30 ஐக் கூட்டும்போது மொத்தப் பணம் ரூ.175 ஆகும். கமலாவிடம், விமலாவிடம் உள்ள பணத்தின் இருமடங்கிலும் ரூ. 95 குறைவாக உள்ளது. கமலாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. x எனவும் விமலாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. y எனவும் கொண்டு,

(i) தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு சோடி சமன்பாட்டை எழுதுக.

(ii) அதிலிருந்து கமலாவிடமும் விமலாவிடமும் உள்ள பணத்தை தனித்தனியே காண்க.

4. “ 2 புத்தகங்களையும் ஒரு பேனையையும் வாங்குவதற்கு ரூ. 65 செலவாகும். அவ்வாறான 2 பேனைகளை வாங்குவதற்குச் செலவாகும் பணத்தைக் கொண்டு அவ்வாறான ஒரு புத்தகத்தை வாங்க முடியும்” என்ற தகவல்களிலிருந்து ஒரு சோடி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்கி, ஒரு புத்தகத்தின் விலையையும் ஒரு பேனையின் விலையையும் வெவ்வேறாகக் காண்க.

13.1 பின்னவடிவிலான குணகங்களைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடி ஒன்றில் தெரியாக் கணியங்களின் குணகங்கள் நிறைவெண்களாக உள்ளபோது அவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து தெரியாக் கணியங்களின் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு நாம் இதற்கு முன்னர் கற்றோம். இனி, குணகங்களாகப் பின்னங்களையுடைய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை உருவாக்குதல், அவற்றைத் தீர்த்தல் என்பன பற்றி உதாரணங்களுடன் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

ரமீஸ், ராஜா ஆகியோரிடம் ஒரு குறித்த தொகைப் பணம் உண்டு. ரமீஸிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{2}$ இற்கு ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{3}$ ஐக் கூட்டும்போது ரூ.20 பெறப்படும். ரமீஸிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{4}$ ஆனது ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{6}$ இற்கு சமனாகுமெனின் இருவரிடமும் உள்ள பணத் தொகைகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

இப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு, ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியொன்றை உருவாக்கித் தீர்க்கும் முறையைப் பார்ப்போம். ரமீஸிடம் உள்ள பணம் ரூ. x எனவும் ராஜாவிடம் உள்ள பணம் ரூ. y எனவும் கொள்வோம்.
அப்போது

ரமீஸீடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{2}$ ஆகிய $\frac{1}{2}x$ ஐயும் ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{3}$ ஆகிய $\frac{1}{3}y$ ஐயும் கூட்டும்போது $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ பெறப்படும். அது ரூ. 20 இற்கு சமனாவதால்

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 20$ ——— ① என்றவாறு ஒரு சமன்பாடு பெறப்படும்.

அவ்வாறே ரமீஸிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{4}$ ஆனது ராஜாவிடம் உள்ள பணத்தின் $\frac{1}{6}$ இற்குச் சமன் என்பதால்,

$\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படும்.

அது $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0$ ——— ② என எழுதப்படும்.

குணகங்களாகப் பின்னங்களைக் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலில் முதலில் அக்குணகங்களை நிறைவெண்களாக்கித் தீர்த்தல் பெரும்பாலும் இலகுவானதாகும். இதற்கேற்ப சமன்பாடு ① இல் குணகங்களின் பகுதி எண்களின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதினால் சமன்பாட்டைப் பெருக்குவதன் மூலம், இலகுவாக குணகங்களை நிறைவெண்களாக மாற்றிக் கொள்ள முடியும்.

எனவே சமன்பாடு ① ஐ 2, 3 ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி ஆகிய 6 இனாலும் சமன்பாடு ② ஐ 4, 6 ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி ஆகிய 12 இனாலும் பெருக்குவோம்.

① $\times$ 6 இனால் $6 \times \frac{1}{2}x + 6 \times \frac{1}{3}y = 6 \times 20$

$$\therefore 3x + 2y = 120 \text{ ——— ③}$$

② $\times$ 12 இனால் $12 \times \frac{1}{4}x - 12 \times \frac{1}{6}y = 12 \times 0$

$$3x - 2y = 0 \text{ ——— ④}$$

இனி ①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பதிலாக அவற்றுக்குச் சமவலுவான ③, ④ ஆகியவற்றைத் தீர்க்கலாம். எனவே ③, ④ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

③ + ④ $\quad (3x + 2y) + (3x - 2y) = 120 + 0$

$$3x + 2y + 3x - 2y = 120$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

$x = 20$ ஐச் சமன்பாடு ④ இல் பிரதியிடுவதால்,

$$3 \times 20 - 2y = 0$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

$\therefore$ ரமீஸிடம் உள்ள பணம் = ரூ. 20

$\therefore$ ராஜாவிடம் உள்ள பணம் = ரூ. 30

குறிப்பு : இப்பிரசினத்தில் குணகங்களை நிறைவெண்களாக மாற்றிய பின்னர் சமன்பாடுகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் y ஐ நீக்கி நாம் x இன் பெறுமானத்தைக் கண்டோம். தேவையாயின் ஒரு தெரியாக் கணியத்தை எழுவாயாக மாற்றி மற்றைய சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதன் மூலமும் விடையைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம். அவ்வாறான ஓர் உதாரணத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

தீர்க்க.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2 \quad \text{——— ①}$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9 \quad \text{——— ②}$$

இச்சமன்பாட்டுச் சோடியில் ஒரு தெரியாக் கணியத்தை எழுவாயாக்கி மற்றைய சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுத் தீர்ப்போம்.

இதற்கு,

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

$$\frac{1}{6}a = -2 + \frac{1}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5}b \quad \text{——— ③}$$ (இருபக்கமும் 6 ஆல் பெருக்குவதால்)

a இன் இப்பெறுமானத்தை சமன்பாடு ② இல் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

$$\frac{1}{3}\left(-12 + \frac{6}{5}b\right) + \frac{1}{4}b = 9$$

$$-4 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{4}b = 9$$

4, 5 ஆகியவற்றின் பொ.ம.சி. ஆன 20 ஐப் பொதுப்பகுதி எண்ணாகக் கொண்டு பின்னச் சுருக்கலைச் செய்வோம்.

$$\frac{8}{20}b + \frac{5}{20}b = 9 + 4$$

$$\frac{13}{20}b = 13$$

$$b = \frac{13 \times 20}{13}$$

$$b = 20$$

$b = 20$ ஐச் சமன்பாடு ③ இல் பிரதியிடுவதால் (இங்கு எந்தச் சமன்பாட்டிலும் பிரதியிடலாம்)

$$a = -12 + \frac{6}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5} \times 20$$

$a = -12 + 24$

$a = 12$

அதாவது தீர்வுகள் $a = 12,\ b = 20$ உம் ஆகும்.

மேற்குறித்த ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகளான $a = 12,\ b = 20$ ஆகிய பெறுமானங்களை அச்சமன்பாடுகளில் பிரதியிடுவதன் மூலம் அத்தீர்வுகள் உண்மையானவை என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

$a = 12,\ b = 20$ என்பதை சமன்பாடு ① இல் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b$

$$= \frac{1}{6} \times 12 - \frac{1}{5} \times 20$$

$$= 2 - 4$$

$$= -2$$

அதாவது, இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

$\therefore\ \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$ என்னும் சமன்பாடு $a = 12, b = 20$ மூலம் திருப்தி செய்யப்படுகிறது.

இவ்வாறே,
$a = 12, b = 20$ ஐச் சமன்பாடு ② இல் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$

$$= \frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{4} \times 20$$

$$= 4 + 5$$

$$= 9$$

$\therefore$ இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

அதாவது, சமன்பாடு $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$ என்பது $a = 12,\ b = 20$ மூலம் திருப்தி செய்யப்படுகிறது.

இதற்கேற்ப $a = 12,\ b = 20$ ஆகியவை சரியான தீர்வுகள் என்பது தெளிவாகின்றது.

உதாரணம் 3

தீர்க்க:

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$$

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1 \text{ ——— } ①$$

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4 \text{ ——— } ②$$ எனக் கொள்வோம்.

உதாரணம் 1 ஐப் போன்று இச்சமன்பாடுகளிலுள்ள பின்னவடிவிலான குணகங்களை நிறைவெண்களாக மாற்றித் தீர்க்கலாம். மேலும் ஒரு மாறியின் பின்னவடிவிலான குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதன் மூலமும் தீர்க்க முடியும். இதற்காக, சமன்பாடு ② ஐ 2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் n இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்திக் கொள்வோம்.

② × 2 இனால் $\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n = 8$ ——— ③

③ – ① இனால் $\left(\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n\right) - \left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n\right) = 8 - 1$

$$\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n = 7$$

$$\frac{10}{6}m - \frac{3}{6}m = 7$$

$$\frac{7}{6}m = 7$$

$$7m = 7 \times 6$$

$$m = 6$$

$m = 6$ ஐ சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடுவோம்

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$3 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{2}{3}n = 1 - 3$$

$$\frac{2}{3}n = -2$$

$$2n = -6$$

$$n = -3$$

அதாவது தீர்வுகள் $m = 6, n = -3$ ஆகும்.

முன்னர் தீர்த்த பிரசினத்தில் போன்று விடையை தொடக்கச் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டுப் பார்ப்பதன் மூலம் விடையின் செவ்வைத் தன்மையை உறுதிப்படுத்திக் கொள்ளலாம்.
$m = 6, n = -3$ ஆகிய தீர்வுகளைப் பிரதியிடுவோம்.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1 \quad \text{——— ①}$$

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4 \quad \text{——— ②}$$

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n$

$= \frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3} \times (-3)$

$= 3 - 2$

$= 1$

இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

இடது கைப்பக்கம் $= \frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n$

$= \frac{5}{6} \times 6 + \frac{1}{3} \times (-3)$

$= 5 - 1$

$= 4$

இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

இதற்கேற்ப, $m = 6, n = -3$ ஆகிய தீர்வுகள் சரியானவை ஆகும்.

பயிற்சி 13.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(a) $\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b = 3$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b = 8$

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 9$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 2$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{1}{2}x - y = 1$

(d) $\frac{2}{7}p - \frac{1}{3}q = 5$
$\frac{1}{2}p - 1\frac{2}{3}q = 12$

(e) $\frac{m}{4} + \frac{5n}{3} = 36$
$\frac{3m}{8} - \frac{5n}{12} = -2$

(f) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} = -1$
$4x - 5y = 22$

2. ஒரு பாடசாலையில் நடைபெற்ற ஓர் உற்சவத்தில் விருந்துபசாரத்துக்குச் செலவாகும் பணத்தில் $\frac{1}{2}$ ஐயும் அலங்கரிப்புகளுக்குச் செலவாகும் பணத்தில் $\frac{1}{3}$ ஐயும் தாம் செலவு செய்வதாக பழைய மாணவர் சங்கம் பொறுப்பேற்றுக் கொண்டது. இதற்கேற்ப பழைய மாணவர் சங்கம் வழங்கிய பணம் ரூ. 20 000 ஆகும். விருந்துபசாரத்துக்கும் அலங்கரிப்புகளுக்கும் செலவாகும் எஞ்சிய பணத்தை நலன்புரிச் சங்கம் பொறுப்பேற்றுக் கொண்டது. இதற்கேற்ப நலன்புரிச் சங்கம் ரூ. 30 000 ஐ வழங்கியது.

(i) விருந்துபசாரத்துக்கு செலவான பணம் ரூ. x எனவும் அலங்கரிப்பதற்கு செலவான பணம் ரூ. y எனவும் கொண்டு இத்தகவல்களைக் குறிக்கும் ஒரு சோடி சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(ii) அவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, விருந்துபசாரத்துக்கும் அலங்கரிப்புகளுக்கும் செலவான பணத்தைத் தனித்தனியே காண்க.

13.2 காரணிகளைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் வடிவிலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் (மூலங்களை) காணும் முறையை நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். அவ்வாறான சில உதாரணங்களை நினைவுகூர்வோம்.

உதாரணம் 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$(x - 2)(x - 3) = 0$ (காரணிகளைக் காண்பதால்)

$x - 2 = 0$ அல்லது $x - 3 = 0$ ஆக வேண்டும்

$\therefore\ x = 2$ அல்லது $x = 3$

$\therefore\ x = 2$, $x = 3$ ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

உதாரணம் 2

$2x^2 + 3x - 9 = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க

$2x^2 + 6x - 3x - 9 = 0$

$2x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$

$(2x - 3)(x + 3) = 0$ (காரணிப்படுத்துவதால்)

$2x - 3 = 0$ அல்லது $x + 3 = 0$ ஆக வேண்டும்

$x = \frac{3}{2}$ அல்லது $x = -3$

$x = 1\frac{1}{2}$, $x = -3$ ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

இனிச் சற்று சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 3

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{3x+2} = 1$$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

இச்சமன்பாட்டை நோக்கும்போது எமக்கு ஓர் இருபடிச்சமன்பாடாகத் தோன்றவில்லை. ஆயினும் இச்சமன்பாட்டைப் பின்னமில்லாத ஒரு சமன்பாடாக மாற்றும்போது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதற்காக, முதலில் சமன்பாட்டின் இடதுகைப்பக்க பொதுப் பகுதி எண்ணைக் கருதுவோம். (முழுச் சமன்பாட்டையும் $2x - 1$, $3x + 2$ ஆகியவற்றின் பொதுமடங்குகளில் சிறியதினால் பெருக்குவதன் மூலமும் இதனைச் செய்யலாம்)

$$\frac{3(3x+2) - 2(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)} = 1$$ (இடது கைப்பக்கத்தை தனிப்பின்னமாக எழுதுவதால்)

$3(3x + 2) - 2(2x - 1) = (2x - 1)(3x + 2)$ (குறுக்குப் பெருக்கத்தால்)

$9x + 6 - 4x + 2 = 6x^2 + 4x - 3x - 2$ (விரித்தெழுதுவதால்)

$6x^2 - 4x - 10 = 0$ (சுருக்குவதால்)

$3x^2 - 2x - 5 = 0$ (சமன்பாட்டின் சகல உறுப்புகளையும் 2 ஆல் வகுப்பதால்)

$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 0$

$x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 0$

$(3x - 5)(x + 1) = 0$

$3x - 5 = 0$, $x + 1 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால்,

$x = \frac{5}{3}$ அல்லது $x = -1$

$x = 1\frac{2}{3}$ அல்லது $x = -1$

$x = 1\frac{2}{3}$ அல்லது $x = -1$ இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

சில உதாரணங்கள் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதை மீட்டிய நாம் இப்போது இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கக்கூடிய ஒரு பிரசினம் பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 4

இரண்டு அடுத்துள்ள நிறைவெண்களின் பெருக்கம் 12 ஆகும். அவ்வெண் சோடியைக் காண்க.

இப்பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்காக ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தும் முறையை ஆராய்வோம். அடுத்துள்ள இரண்டு எண்களிலும் சிறிய எண்ணை x எனக் கொள்வோம். அப்போது மற்றைய எண் $x + 1$ ஆகும்

இதற்கேற்ப, அடுத்துள்ள எண் சோடியை x, $(x + 1)$ என எடுக்கலாம். இரண்டு எண்களினதும் பெருக்கம் 12 என்பதால்

$x \times (x+1) = 12$ என எழுதலாம்.

$\therefore\ x^2 + x - 12 = 0$

இதன் காரணிகளைக் காணும்போது,

$(x - 3)(x + 4) = 0$ ஆகும்.

$\therefore\ x - 3 = 0$ அல்லது $x + 4 = 0$ ஆக வேண்டும்

$\therefore\ x = 3$ அல்லது $x = -4$

$x = 3$ அல்லது $x = -4$ என்பன மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$x = 3$ ஆகும்போது அடுத்துள்ள எண் $(x + 1) = 3 + 1 = 4$ஆகும்.

$x = -4$ ஆகும்போது அடுத்துள்ள எண் $(x + 1) = -4 + 1 = -3$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப பெருக்கம் 12 ஆக வரும் அடுத்துள்ள நிறைவெண்களின் இரண்டு சோடிகள் இருப்பதுடன் அவை "3, 4" உம் "–3, – 4" உம் ஆகும். மேற்குறித்த இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + x - 12$ இன் தீர்வுகளை அச்சமன்பாட்டிலேயே பிரதியிட்டு அத்தீர்வுகள் உண்மையானவை எனப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = 3$ ஐ சமன்பாட்டின் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்

இ.கை.ப. $= x^2 + x - 12$

$= 3^2 + 3 - 12$

$= 9 + 3 - 12$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore$ இ.கை.ப. = வ.கை.ப.

$x = -4$ ஐ சமன்பாட்டின் இடது கைப்பக்கத்தில் பிரதியிடுவோம்

இ.கை.ப.$= x^2 + x - 12$

$= (-4)^2 + (-4) - 12$

$= 16 - 4 - 12$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore$ இ.கை.ப.= வ.கை.ப.

இதன்படி சமன்பாடு $x^2 + x - 12 = 0$ இன் தீர்வுகள் 3,–4 என உறுதிப்படுத்தப்படுகிறது.

உதாரணம் 5

ஒரு செவ்வக வடிவிலான காணியின் நீளமானது அதன் அகலத்திலும் 5 மீற்றரினால் கூடியதாகும். அதன் பரப்பளவு 150 சதுர மீற்றர்களாகும்.

(i) காணியின் அகலத்தை x மீற்றர் எனக் கொண்டு, காணியின் நீளத்துக்கான ஒரு கோவையை x இன் சார்பில் எழுதுக.

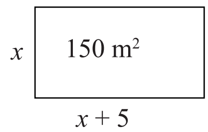
(ii) x இலான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(iii) சமன்பாட்டைத் தீர்த்து காணியின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் காண்க.

(i) அகலத்தை x மீற்றர் எனக் கொள்வோம். அப்போது

நீளம் = $x + 5$ மீற்றர் ஆகும்

(ii) இத்தகவலை ஓர் உருவில் குறித்தால் மிகத்தெளிவாக விளங்கும்.



பரப்பளவு = நீளம் × அகலம்

$= (x + 5) \times x$

$x\,(x + 5) = 150$

இது தேவையான சமன்பாடாகும்.

(iii) மேற்குறித்த சமன்பாட்டைத் தீர்ப்போம்.

$x\,(x + 5) = 150$

$x^2 + 5x - 150 = 0$

$(x - 10)\,(x + 15) = 0$

$\therefore\ x - 10 = 0$ அல்லது $x + 15 = 0$

$x = +10$ அல்லது $x = -15$

$\therefore\ x = +10$, $x = -15$ ஆகியன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

ஆயினும் x இன் மூலம் ஒரு நீளத்தை குறிப்பிடுவதால் அது மறையாக இருக்க முடியாது.

எனவே $x = 10$ என்னும் பெறுமானம் மட்டும் பொருந்தும்

இதற்கேற்ப, செவ்வகத்தின் அகலம் =10 m உம்

செவ்வகத்தின் நீளம் =15m உம் ஆகும்.

மேலே x இற்குப் பெறப்பட்ட இரண்டு பெறுமானங்களையும் பிரதியிட்டு $x(\ x + 5) =150$ இன் தீர்வுகள் 10, –15 என உறுதிப்படுத்தலாம்.

இ.கை.ப. $= x\,(x + 5)$

$= 10\,(10 + 5)$

$= 10 \times 15$

$= 150$

இ.கை.ப. = வ.கை.ப.

இவ்வாறே, $x = -15$ ஐயும் ஒரு தீர்வென உறுதிப்படுத்தலாம்.

பயிற்சி 13.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் இருபடிச் சமன்பாட்டையும் தீர்க்க.

(a) $x(x+5)=0$ **(b)** $\frac{3}{4}x(x+1)=0$ **(c)** $(x-4)(x+3)=0$

(d) $x^2-2x=0$ **(e)** $\frac{x^2}{2}=3x$ **(f)** $x^2+7x+12=0$

(g) $(x-2)(2x+3)=x^2+2x+4$ **(h)** $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+1}=3$

(i) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$ **(j)** $x^2-4=0$

2. காரணி அறிவைக் கொண்டு கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் இருபடிச் சமன்பாட்டையும் தீர்க்க.
($\sqrt{2}=1.41, \sqrt{3}=1.73, \sqrt{5}=2.23$)

(a) $x^2-12=0$ **(b)** $x^2-21=11$ **(c)** $x^2+17=37$

3. யாதேனும் ஓர் எண்ணின் வர்க்கத்திலிருந்து அவ்வெண்ணின் இரண்டு மடங்கைக் கழிக்கும்போது விடையாக 15 பெறப்படும். அவ்வெண்ணைக் காண்க.

4. அடுத்துள்ள இரண்டு இரட்டை எண்களின் பெருக்கம் 120 ஆகும். இரண்டு எண்களையும் காண்க

5. செவ்வக வடிவிலான ஓர் அடரின் நீளம் அதன் அகலத்திலும் 3 சென்ரிமீற்றரினால் கூடியதாகும். இவ்வடரின் பரப்பளவு 88 சதுர சென்ரிமீற்றர்களாகும். அடரின் நீளம், அகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. செவ்வக வடிவிலான ஒரு புற்றரையின் நீளம் 32m உம் அகலம் 20m உம் ஆவதுடன் அதனைச் சுற்றி வெளியே சீரான அகலத்தையுடைய ஒரு பாதையும் உண்டு. பாதையின் பரப்பளவு 285m^2 ஆகும்.

(i) பாதையின் அகலத்தை x m எனக் கொண்டு தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து xஇலான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) அச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து பாதையின் அகலத்தைக் காண்க.

7. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் நீளம் $(2x+1)$ சென்ரிமீற்றர் ஆகும். மற்றைய இரண்டு பக்கங்களினதும் நீளங்கள் முறையே x சென்ரிமீற்றர் $(x+7)$ சென்ரிமீற்றர் ஆகும். xஇன் பெறுமானத்தைக் கண்டு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

8. $-7, -5, -3, -1, \ldots$ என்னும் கூட்டல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 105 ஆகும். விருத்தி தொடர்பான அறிவைப் பயன்படுத்தி,

(i) n இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) மேற்குறித்த சமன்பாட்டைத் தீர்த்து உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

13.3 வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது உரிய கோவையைக் காரணிப்படுத்தித் தீர்வுகளைக் காணும் முறை பற்றி அறிந்தோம். ஆயினும் $x^2 + 3x + 5 = 0$, $2x^2 - 5x - 1 = 0$ போன்ற இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காரணிப்படுத்தித் தீர்த்தல் இலகுவானதல்ல. அவ்வாறான சமன்பாடுகளில் மூலங்களைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக வேறொரு முறையைப் பயன்படுத்துவது இலகுவானதாகும். கோவையை ஒரு நிறைவர்க்கமாக மாற்றித் தீர்த்தல் ஒரு முறையாகும். இது வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் எனப்படும். வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கு முன்னர் $x^2 + bx$ என்ற ஒரு கோவையை நிறைவர்க்கமாக்குவதைக் கற்ற முறையை நினைவில் கொண்டு வருவோம். அதற்காக, கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகளை நிறைவர்க்கமாக மாற்றுவதற்கு கூட்டப்பட வேண்டிய மாறா உறுப்பை எழுதி அவற்றை நிறைவர்க்கங்களாக ஒழுங்கமைக்க. (முதலாவது பகுதி செய்யப்பட்டுள்ளது)

a. $x^2 + 6x + 9 \quad = (x + 3)^2$

b. $x^2 + 8x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c. $x^2 - 14x + \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d. $x^2 + 3x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 8x + \ldots$

f. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 2ax + \ldots$

g. $(x + b)^2 = x^2 + \ldots x + b^2$

h. $(x + m)^2 = x^2 + \ldots x + m^2$

முதலில் காரணிகளைப் பயன்படுத்தியும் தீர்க்கக்கூடிய ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்கும் முறையைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 1

$x^2 + 2x - 3 = 0$ என்பதை வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்க.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x = 3$$

இடது கைப்பக்கத்தை நிறைவர்க்கமாக எழுதுவதற்காக x இன் குணகத்தின் அரைமடங்கின் வர்க்கமாகிய $+1$ ஐக் கூட்டுவோம். அப்போது வலது கைப்பக்கமும் $+1$ ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$
$$(x + 1)^2 = 4$$

இனி, இரு பக்கமும் வர்க்கமூலத்தைக் காண்போம்.

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 1 = \pm 2$$
$$x = \pm 2 - 1$$

அதாவது, $x = +2 - 1$ அல்லது $x = -2 - 1$

$x = 1$ அல்லது $x = -3$

இதற்கேற்ப, மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x = 1$, $x = -3$ ஆகும்.

இனி, இன்னோர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 2

$x^2 - 4x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்க.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x = -1$$

$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 3$$

$x - 2 = \pm\sqrt{3}$ (இருபக்கமும் வர்க்கமூலம் காண்பதால்)

$$x = 2 \pm\sqrt{3}$$

$x = 2 + \sqrt{3}$ அல்லது $x = 2 - \sqrt{3}$ ஆகும்.

$\sqrt{3}$ இற்கான கிட்டிய பெறுமானமாக 1.73 தரப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$x = 2 + 1.73$ அல்லது $x = 2 - 1.73$ ஆக வேண்டும்.

$x = 3.73$ அல்லது $x = 0.27$

$x = 3.73$, $x = 0.27$ என்பன சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 3

தீர்க்க. $2x^2 + 6x - 5 = 0$

இச்சமன்பாட்டை நிறை வர்க்கமாக எழுதுவதற்கு x இன் குணகத்தை 1 என அமைத்துக் கொள்வது மிக இலகுவானதாகும். சமன்பாட்டை 2 ஆல் வகுப்பதால் வர்க்க உறுப்பின் குணகத்தை 1 என மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளலாம்.

$$2x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$$

$$x^2 + 3x = \frac{5}{2}$$

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+10 + 9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+19}{4}$$

$$x + \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{19}}{2}$$

$x = \frac{+\sqrt{19} - 3}{2}$ அல்லது $x = \frac{-\sqrt{19} - 3}{2}$

$\sqrt{19}$ இற்கான கிட்டிய பெறுமானமாக 4.36 தரப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$$x = \frac{4.36 - 3}{2} \text{ அல்லது } x = \frac{-4.36 - 3}{2}$$

$$x = -0.68 \text{ அல்லது } x = -3.68$$

$x = 0.68$, $x = -3.68$ என்பன சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 13.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளை வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்க்க. ($\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{5} = 2.23$, $\sqrt{6} = 2.44$, $\sqrt{13} = 3.6$, $\sqrt{17} = 4.12$, $\sqrt{57} = 7.54$ எனக் கொள்க)

(a) $x^2 - 2x - 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 8x - 2 = 0$ **(c)** $x^2 - 6x = 4$
(d) $x^2 + 4x - 8 = 0$ **(e)** $x(x + 8) = 8$ **(f)** $x^2 + x = 4$
(g) $2x^2 + 5x = 4$ **(h)** $3x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2x+3} = 1$

13.4 சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் வடிவிலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கான மிக இலகுவான முறை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதாகும். முதலில் மூலங்கள் தரப்படுகின்ற சூத்திரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறை பற்றிக் கவனிப்போம். உண்மையில் இங்கு நடைபெறுவது, சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதை வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல் மூலம் தீர்ப்பதாகும்.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$ (a ஆல் வகுப்பதால்) ($\therefore\ a \neq 0$)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$ (இருபக்கமும் $\frac{b}{a}$ இன் அரை மடங்கின் வர்க்கத்தைக் கூட்டுவதன் மூலம்)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$ (இடது கைப்பக்கத்தை நிறைவர்க்கமாக எழுதி வலது கைப்பக்க உறுப்பை ஒழுங்கமைப்பதன் மூலம்)

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$ (வலது கைப்பக்கத்தை பொதுப் பகுதி எண்ணுடன் எழுதுவதால்)

எனவே, $$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a^2}}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (பொதுப் பகுதி எண்ணுடன் எழுதுவதால்)

இதற்கேற்ப,
$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் வடிவிலான இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு

$$\boxed{x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

இங்கு நேர், மறைப் பெறுமானங்கள் இரண்டிற்கும் ஒத்த x இன் இரண்டு பெறுமானங்கள் (மூலங்கள்) கிடைக்கும்.

இங்கு a என்பது உறுப்பு x^2 இன் குணகமும் b என்பது உறுப்பு x இன் குணகமும், c என்பது மாறா உறுப்பும் ஆகும்.

உதாரணம் 1

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டில்
$a = 2, b = 7, c = 3$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times2\times3}}{2\times2}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{-7\pm5}{4}$$

$$x = \frac{-7+5}{4}$$ அல்லது $$x = \frac{-7-5}{4}$$

$x = -\frac{1}{2}$ அல்லது $x = -3$

$x = -\frac{1}{2}$, $x = -3$ என்பன மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 2

$4x^2 - 7x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.
$\sqrt{17} = 4.12$ எனக் கொள்க.

$$4x^2 - 7x + 2 = 0$$

இங்கு $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$ எனக் கொள்ளலாம். ($ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின்படி)

இதற்கேற்ப, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8}$$

$= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$ ($\sqrt{17} = 4.12$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்)

$$= \frac{7 \pm 4.12}{8}$$

$x = \frac{7 + 4.12}{8}$ அல்லது $x = \frac{7 - 4.12}{8}$

$x = \frac{11.12}{8}$ அல்லது $x = \frac{2.88}{8}$

$x = 1.39$ அல்லது $x = 0.36$

$x = 1.39$, $x = 0.36$ என்பன மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 3

$x^2 + 2x - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்த்து, விடையை இரண்டாம் தசமதானத்துக்குத் திருத்தமாகக் காண்க. ($\sqrt{2} = 1.414$ எனக் கொள்க).

$a = 1$, $b = 2$, $c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$= -\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2 \times 1.414}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2.828}{2}$$

$x = \frac{-2 + 2.828}{2}$ அல்லது $x = \frac{-2 - 2.828}{2}$

$= \frac{0.828}{2}$ $\quad$ $x = \frac{-4.828}{2}$

$x = 0.414$ அல்லது $x = -2.414$

$x = 0.41, x = -2.41$ என்பன மேலேயுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 13.4

1. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கீழே தரப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, விடைகளைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்திற்குத் தருக.

($\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{17} = 4.12$, $\sqrt{29} = 5.38$ எனக் கொள்க).

(a) $x^2 - 6x - 3 = 0$ **(b)** $x^2 - 7x + 5 = 0$ **(c)** $2x^2 - x - 2 = 0$

(d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ **(e)** $3x^2 - 4x - 7 = 0$

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு நேர் எண்ணின் வர்க்கத்திலிருந்து அவ்வெண்ணின் மூன்று மடங்கைக் கழிக்கும்போது 28 கிடைக்கும். அவ்வெண்ணைக் காண்க.

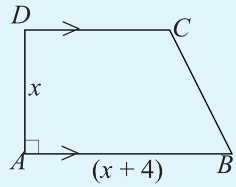
2. அடுத்துள்ள இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கம் 99 ஆகும். இரண்டு எண்களையும் காண்க.

3. ஒரு செவ்வக வடிவிலான தகட்டுத்துண்டின் நீளம் அதன் அகலத்திலும் 6cm கூடியதாகும். தகட்டின் பரப்பளவு 44 cm^2 ஆகும். அகலத்தை x cm எனக் கொண்டு

(i) தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக.

(ii) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி அச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து xஇன் பெறுமானங்களைக் கிட்டிய முதலாம் தசமதானத்துக்குத் தருக. ($\sqrt{53} = 7.28$ எனக் கொள்க).

4. $ABCD$ ஒரு சரிவகமாகும் இதில் $AD = CD$ ஆகும்.



(i) சரிவகத்தின் பரப்பளவு 12cm^2 ஆயின் $x^2 + 2x - 12 = 0$ இன் மூலம் x இன் பெறுமானங்கள் தரப்படுகின்றன எனக் காட்டுக.

(ii) வர்க்கப்பூர்த்தியாக்கல் மூலம் அல்லது வேறொரு முறையில் மேலே (i) இன் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து x இன் பெறுமானத்தைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு காண்க.

5. அடுத்துள்ள மூன்று இயற்கை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 149 ஆகும். இம்மூன்று எண்களிலும் நடு எண் x எனக் கொண்டு ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்த்து, அதிலிருந்து பெரிய எண்ணைக் காண்க.

6. ஒரு செங்கோண முக்கோணியில் செங்கோணத்தை அமைக்கும் இரண்டு பக்கங்களினதும் நீளங்கள் $5x$ சென்ரிமீற்றர், $(3x - 1)$ சென்ரிமீற்றர் ஆகும். இதன் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆயின் x இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்த்து அதிலிருந்து முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

7. ஒரு மனிதன் ரூ. 600 இற்கு ஒரு தொகை மாம்பழங்களை வாங்கினான். ஒரு மாம்பழத்தின் விலை ஒரு ரூபாயினால் குறைந்திருப்பின் அவன் மேலும் 20 மாம்பழங்களை அதிகமாக வாங்கியிருக்கலாம். வாங்கிய மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

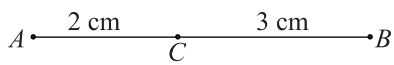
14 இயல்பொத்த முக்கோணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- "ஒரு முக்கோணியின் பக்கமொன்றுக்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் ஒரு கோட்டினால் எஞ்சிய இரு பக்கங்களும் விகித சமனாகப் பிரிபடும்" என்னும் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்ளவும்
- "ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்கள் நேர்கோடொன்றின் மூலம் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்படுமாயின் அந்நேர்கோடானது எஞ்சிய பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாகும்" என்னும் மறுதலைத் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்ளவும்
- இயல்பொத்த உருவங்கள் என்பதன் கருத்தை விளங்கிக் கொள்வதற்கும்
- "இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாகும்" என்னும் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்.
- "இரண்டு முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாயின் அம்முக்கேணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவை" என்னும் மறுதலைத் தேற்றத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பக்கங்களுக்கு இடையிலான விகிதம்



$AC = 2$ cm, $CB = 3$ cm ஆகுமாறு AB இன்மீது C ஆனது அமைந்துள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB உருவில் தரப்பட்டுள்ளது. C இனால் நேர்கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது AC, CB என இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அப்போது AC, CB என்பவற்றுக்கிடையிலுள்ள விகிதத்தை அவற்றின் நீளங்களிலிருந்து பெறலாம்.

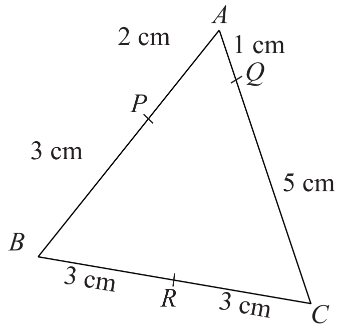
$AC : CB = 2 : 3$

இவ்வாறே $AC : AB = 2 : 5$ ($AB = 5$ cm என்பதால்) எனவும்

$CB : AC = 3 : 2$ எனவும்

$CB : AB = 3 : 5$ உம் எனவும் எழுதலாம்.

விகிதத்துக்காகத் தொடர்புபடுத்திக் கொள்ளும் பக்கங்களின் ஒழுங்கிலேயே அவற்றின் நீளங்களுக்கிடையிலான விகிதத்தையும் எழுதலாம். கீழே உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC ஐக் கருதுக.



உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் மீதும் அங்கு தரப்பட்டுள்ள முறையில் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளபோது கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு விகிதங்களை எழுதலாம்.

(i) $AP : PB = 2 : 3$, $AP : AB = 2 : 5$, $PB : AP = 3 : 2$

(ii) $AQ : QC = 1 : 5$, $AQ : AC = 1 : 6$, $QC : AQ = 5 : 1$

(iii) $BR : RC = 3 : 3 = 1 : 1$, $BR : BC = 3 : 6 = 1 : 2$, $RC : BR = 3 : 3$

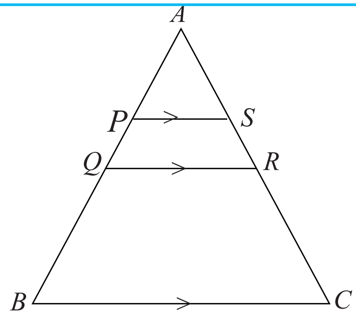
விகிதத்திலிருந்து பின்னத்தையும் எழுதமுடியுமென்பதை நாம் கற்றுள்ளோம். அதற்கேற்ப, $AQ : QC = 1 : 5$ என்பதை $\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{5} = 0.2$ எனவும் எழுதலாம்.

14.1 ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்களை எஞ்சிய பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாக வரையும் ஒரு கோட்டினால் பிரித்தல்

ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்களை வெட்டிச் செல்லுமாறு எஞ்சிய பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டினால் அப்பக்கங்கள் இரண்டும் பிரிபடும் விகிதங்கள் பற்றி ஆராய்வதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு

- $AB = 6$ cm ஆகவும் எஞ்சிய இரு பக்கங்களும் எந்தவொரு நீளமாகவும் இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணியை வரைக.
- $AP = 2$ cm, $AQ = 3$ cm ஆகுமாறு AB யின் மீது P, Q ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்க.
- மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு முறையில் Q வின் ஊடாக BC யிற்குச் சமாந்தரமாகக் கோடொன்றை வரைந்து அது கோடு AC ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை R எனப் பெயரிடுக.



- AR, RC ஆகியவற்றை அளந்து கொள்க.
- BC இற்குச் சமாந்தரமாக P இனூடாக மேலுமொரு கோட்டை வரைந்து அது கோடு AC யைச் சந்திக்கும் புள்ளியை S எனப் பெயரிடுக.
- AS, SC ஆகியவற்றை அளந்து கொள்க.
- தற்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

சந்தர்ப்பம்	பக்கம் AB யின் பகுதிகளுக்கிடையிலான விகிதம்	பக்கம் AC யின் பகுதிகளுக்கிடையிலான விகிதம்	இரண்டு விகிதங்களுக்கிடையிலான தொடர்பு
Q இனூடாக சமாந்தரக் கோடு	$\frac{AQ}{QB} = \frac{3}{3} = 1$	$\frac{AR}{RC} =$	
P இனூடாக சமாந்தரக் கோடு	$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{4} = 0.5$	$\frac{AS}{SC} =$	

- இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணி, விரிகோண முக்கோணி என்பவற்றிலும் ஒரு பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாக வரையும் ஒரு கோட்டினால் எஞ்சிய இரண்டு பக்கங்களும் பிரிபடும் விகிதங்களுக்கிடையிலான தொடர்பைப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

உங்களுக்குக் கிடைத்த விடைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ள வாக்கியத்துடன் பொருந்துகின்றனவா எனப் பார்க்க.

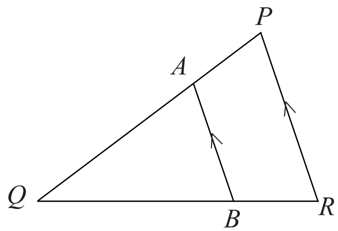
ஒரு முக்கோணியில் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டினால் எஞ்சிய இரு பக்கங்களும் விகிதசமனாகவே பிரிபடும்.

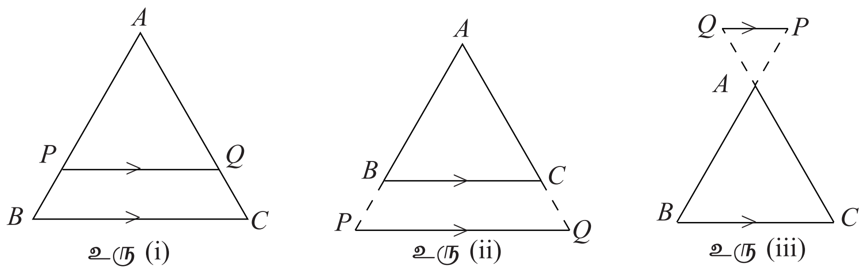
மேலே பெற்றுக் கொண்ட முடிபை ஒரு கேத்திரகணிதத் தேற்றமாக இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.

தேற்றம்
ஒரு முக்கோணியில் ஒரு பக்கத்திற்கு சமாந்தரமாக வரையும் கோட்டினால் எஞ்சிய இரண்டு பக்கங்களும் விகிதசமனாகப் பிரிபடும்.

உதாரணமாக உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PR இற்குச் சமாந்தரமாக AB வரையப்பட்டுள்ளது.
எனவே தேற்றத்தின் படி

(i) $QA : AP = QB : BR$ அதாவது, $\frac{QA}{AP} = \frac{QB}{BR}$ ஆகும்.





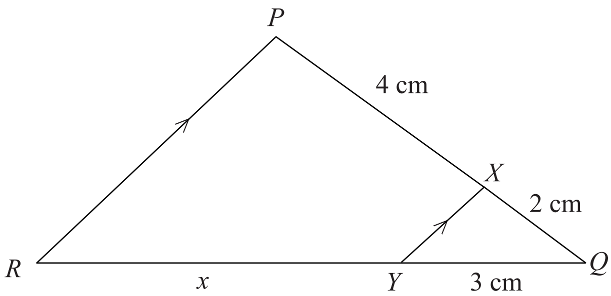
மேலே தரப்பட்டுள்ள மூன்று உருக்களையும் அவதானிக்க அவற்றில் உரு (i) இல் AB, AC ஆகிய பக்கங்கள் அகமாகப் பிரிக்கப்படுமாறு BC இற்குச் சமாந்தரமாக PQ வரையப்பட்டுள்ளது. ஆயினும் உரு (ii), (iii) ஆகியவற்றில் BC இற்குச் சமாந்தரமான கோடு PQ ஆனது நீட்டப்பட்ட பக்கங்களைச் சந்திக்கின்றது. இவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் PQ இன் மூலம் AB, AC ஆகிய பக்கங்கள் புறமாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன எனக் கூறப்படும். இவ்வாறு பக்கங்கள் புறமாக அல்லது அகமாக பிரிக்கப்படினும் மேற்குறித்த தேற்றம் செல்லுபடியாகும். அதாவது,

மேலே உள்ள மூன்று உருவங்களிலும் $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ஆகும்.

இனி இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி செய்யப்பட்ட கணித்தல்களை உள்ளடக்கிய பின்வரும் உதாரணத்தைப் பார்க்க.

உதாரணம் 1

முக்கோணி PQR இல் பக்கம் PR இற்குச் சமாந்தரமாக XY வரையப்பட்டுள்ளது. $PX = 4$ cm, $XQ = 2$ cm, $YQ = 3$ cm ஆயின் RY யின் நீளத்தைக் காண்க.



RY இன் நீளத்தை x எனக் கொள்வோம்.

அப்போது PR இற்குச் சமாந்தரமாக XY வரையப்பட்டுள்ளதால்,

தேற்றத்தின் படி $\dfrac{RY}{YQ} = \dfrac{PX}{XQ}$

அதாவது $\dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{4}$

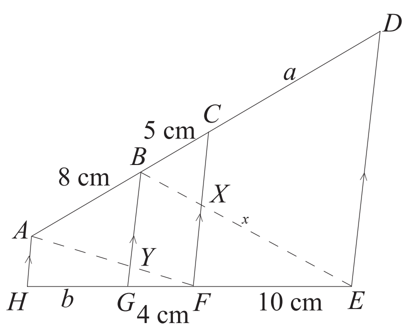
$\therefore \quad 2x = 4 \times 3$

$\therefore \quad x = 6$

$\therefore$ RY இன் நீளம் 6 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களின்படி a, b ஆகியவற்றின் மூலம் தரப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.



முக்கோணி BED யில் $DE//CX$ என்பதால் தேற்றத்தின்படி CX இனால் BD, BE ஆகிய பக்கங்கள் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.

அதாவது, $\frac{BC}{CD} = \frac{BX}{XE}$

அதாவது, $\frac{5}{a} = \frac{BX}{XE}$ ——①

இனி முக்கோணி BGE யில் $BG//XF$ என்பதால் தேற்றத்தின்படி EB, EG ஆகிய பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.

அதாவது, $\frac{BX}{XE} = \frac{GF}{FE}$

எனவே, $\frac{BX}{XE} = \frac{4}{10}$ ——②

①, ② ஆகிய இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{5}{a} = \frac{4}{10}$$

அதாவது, $4a = 50$

$$a = \frac{50}{4}$$

$$= 12.5 \text{ cm}$$

மேற்குறித்தவாறே AF ஐ இணைப்பதால்,

முக்கோணி ACF இல், $\frac{AB}{BC} = \frac{AY}{YF}$

$$\frac{8}{5} = \frac{AY}{YF} \quad \text{——③}$$

முக்கோணி AHF இல், $\frac{AY}{YF} = \frac{HG}{GF}$

$$\frac{AY}{YF} = \frac{b}{4} \quad \text{——④}$$

③, ④ ஆகிய இரண்டு சமன்பாடுகளிலுமிருந்தும்

$$\frac{b}{4} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad 5b = 32$$

$$b = \frac{32}{5}$$

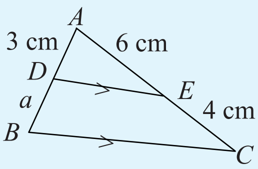
$$= 6.4 \text{ cm}$$

இனிக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிகளில் உள்ள கணித்தல்களில் ஈடுபட்டு கற்ற விடயங்களை உறுதிப்படுத்திக் கொள்ளுங்கள்.

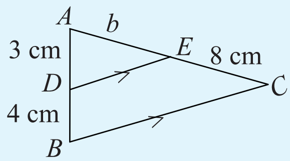
பயிற்சி 14.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் சில நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்கள் தெரியாக் கணியங்கள் மூலம் தரப்பட்டுள்ளன. அத்தெரியாக் கணியங்களால் குறிக்கப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

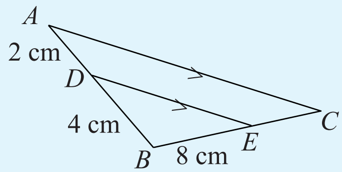
(i)



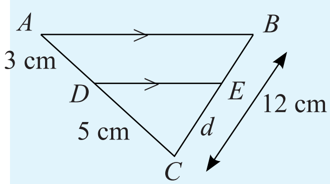
(ii)



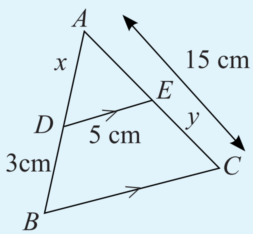
(iii)



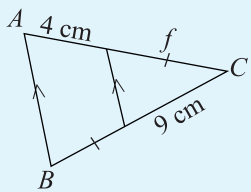
(iv)



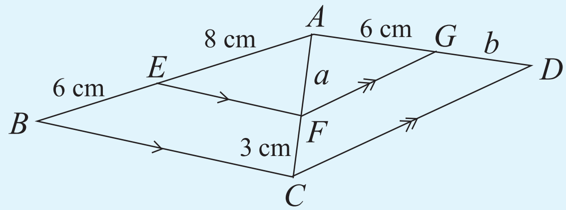
(v)



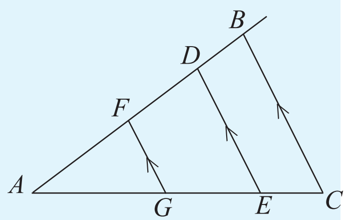
(vi)



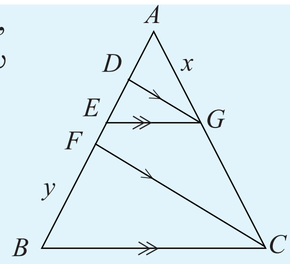
2. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் a, b ஆகியவற்றினால் குறிக்கப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.



3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $FG//DE//BC$ ஆகும். $AF = 6$ cm, $DB = 3$ cm, $AG = 8$ cm, $GE = 8$ cm ஆகும். FD, EC ஆகிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.



4. உருவில் $DG//FC$, $EG//BC$ ஆகும். $AD = 6$ cm, $DE = 4$ cm, $EF = 5$ cm, $GC = 18$ cm ஆகும். x, y ஆகியவற்றினால் குறிக்கப்படும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

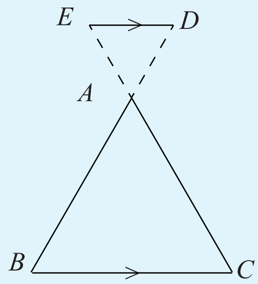


5. உருவில் முக்கோணி ABC யில் நீட்டப்பட்ட BA, CA ஆகியன BC யிற்கு சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு ED யினால் புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. $AE = 2$ cm, $AD = 3$ cm, $AC = 4$ cm ஆகும். கோட்டுத் துண்டம் AB யின் நீளம் x இனால் தரப்பட்டுள்ளது.

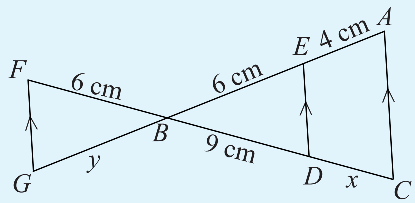
(i) கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

DB : .... = ... : EA

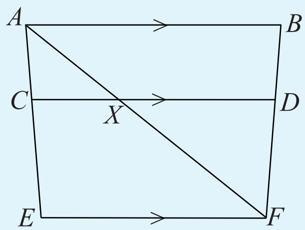
(ii) x இனால் தரப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க



6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களின் படி x, y என்பவற்றின் மூலம் தரப்படும் பெறுமானங் களைக் காண்க.



7. உருவில் $AB//CD//EF$ ஆகும். $AC = 3$ cm, $CE = 5$ cm, $BF = 12$ cm ஆகும். BD, DF ஆகியவற்றின் பெறுமானங் களைக் காண்க.



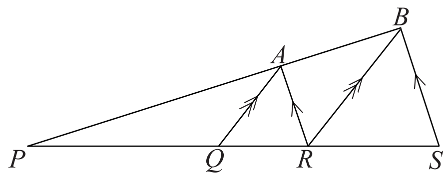
8. முக்கோணி ABC யில் $B\hat{C}A$ யின் இருசமகூறாக்கியானது பக்கம் AB ஐ X இல் சந்திக்கின்றது. $PX = PC$ ஆகுமாறு புள்ளி P ஆனது. BC இன் மீது அமைந்துள்ளது. $PX = 9$ cm, $BX = 5$ cm, $AX = 6$ cm ஆயின் பக்கம் BC இன் நீளத்தைக் காண்க.

14.2 ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படல் மேலும்

"ஒரு முக்கோணியில் பக்கமொன்றுக்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோட்டினால் எஞ்சிய இரண்டு பக்கங்களும் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்படும்" என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவுதல் தொடர்பாக இப்பகுதியில் கலந்துரையாடுவோம்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள உருவில் $PQRS$, PAB ஆகியன நேர்கோடுகளாகும்.
$BS//AR$, $BR//AQ$ ஆகும். $PQ : QR = PR : RS$ என நிறுவுக.



நிறுவல் : முக்கோணி PBR இல் பக்கம் BR ஆனது AQ இற்கு சமாந்தரமாவதால் தேற்றத்தின்படி

$PA : AB = PQ : QR$ ——①

முக்கோணி PBS இல் பக்கம் BS ஆனது AR இற்கு சமாந்தரமாவதால், தேற்றத்தின்படி

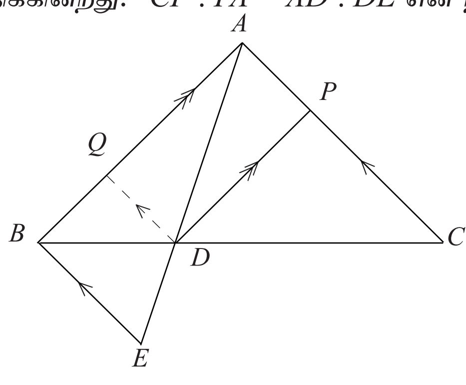
$PA : AB = PR : RS$ ——②

①, ② இலிருந்து

$PQ : QR = PR : RS$

உதாரணம் 2

D என்பது முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட கோடு AD யை E யில் சந்திக்குமாறு AC யிற்குச் சமாந்தரமாக BE வரையப்பட்டுள்ளது. AB யிற்குச் சமாந்தரமாக D யிலிருந்து வரையப்பட்ட கோடானது AC யை P யில் சந்திக்கின்றது. $CP : PA = AD : DE$ என நிறுவுக.



இங்கு முன்னைய உதாரணத்தைப் போன்றே ஒரு சோடி முக்கோணியையும் அவ்வொவ்வொரு அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டையும் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். இதற்காக முக்கோணி ABE யையும் முக்கோணி ABC யையும் தெரிந்து கொள்வது இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொது அடியொன்று இருப்பதனாலேயே ஆகும்.

ஆயினும் முக்கோணி ABE யில் அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு இல்லை. எனவே இவ்வாறான ஒரு கோட்டை முதலில் அமைத்துக் கொள்வோம்.

அமைப்பு : பக்கம் AB யை Q வில் சந்திக்குமாறு BE யிற்கு சமாந்தரமாக DQ வை வரைவோம். (இப்போது AC, QD, BE ஆகிய கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை ஆகும்)

நிறுவல் :

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB இற்கு PD சமாந்தரம் என்பதால் தேற்றத்தின் படி

$$CP : PA = CD : DB \quad \text{———} ①$$

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AC இற்கு QD சமாந்தரம் என்பதால் தேற்றத்தின் படி,

$$AQ : QB = CD : DB \quad \text{———} ②$$

முக்கோணி ABE யில் பக்கம் BE இற்கு QD சமாந்தரம் என்பதால் தேற்றத்தின் படி,

$$AQ : QB = AD : DE \quad \text{———} ③$$

①, ②, ③ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

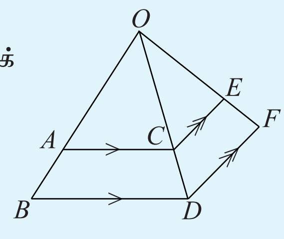
$CP : PA = CD : DB = AQ : QB = AD : DE$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad CP : PA = AD : DE$$

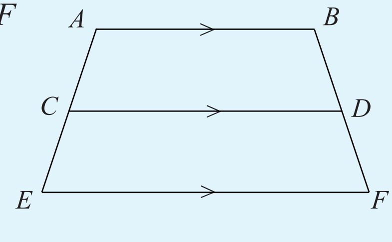
தற்போது பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 14.2

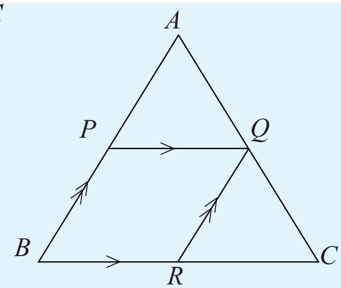
1. உருவில் உள்ள தகவல்களின்படி $OA : AB = OE : EF$ எனக் காட்டுக.



2. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி $AC : CE = BD : DF$ என நிறுவுக.

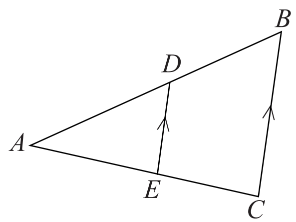


3. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி $AP : PB = BR : RC$ என நிறுவுக.



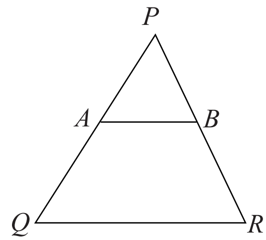
4. முக்கோணி PQR இல் பக்கம் QR இன் மீது புள்ளி A அமைந்துள்ளது. PR இற்குச் சமாந்தரமாக A இனூடாக வரையப்பட்ட கோடு பக்கம் PQ வை B இல் சந்திக்கின்றது. கோடு AB யை C யிலும் கோடு PQ வை D யிலும் வெட்டிச் செல்லுமாறு R இல் இருந்து கோடு RCD வரையப்பட்டுள்ளது.
$D\hat{B}C = B\hat{C}D$ ஆயின், $\dfrac{QA}{AR} = \dfrac{QB}{CR}$ என நிறுவுக.

14.3 ஒரு முக்கோணியில் எந்தவொரு பக்கத்திற்கும் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோட்டினால் எஞ்சிய பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படுவது தொடர்பான தேற்றத்தின் மறுதலை



முக்கோணி ABC யில், பக்கம் BC இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோடு DE இனால் AB, AC ஆகிய பக்கங்கள் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன என மேற்குறித்த தேற்றத்தில் முடிவு செய்யப்படுகின்றது.

அதாவது $BC//DE$ என்பதால் $AD : DB = AE : EC$ ஆகும். இத்தேற்றத்தின் மறுதலையை உருவில் உள்ள முக்கோணி PQR இற்கேற்ப விளங்கிக் கொள்வோம்.



இங்கு PQ, PR ஆகிய இரண்டு பக்கங்களும் கோடு AB யினால் இடைவெட்டப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் வேறாக்கப்பட்ட பகுதிகளுக்கிடையிலான விகிதம் $PA : AQ$, $PB : BR$ ஆகும்.

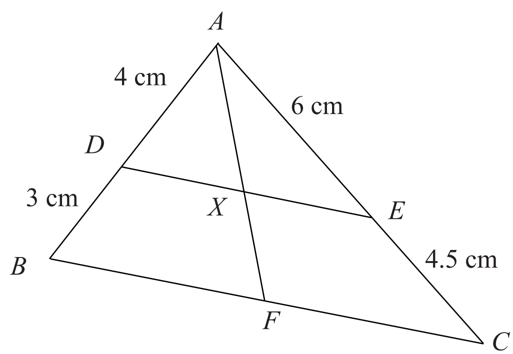
இந்த இரண்டு விகிதங்களும் சமனாகுமாயின் அதாவது $PA : AQ = PB : BR$ ஆகுமாயின் அப்போது இரண்டு பக்கங்களையும் இடைவெட்டும் கோடாகிய AB எஞ்சிய பக்கமாகிய QR இற்குச் சமாந்தரமாகும். இது இப்பாடத்தின் தொடக்கத்தில் கற்ற தேற்றத்தின் மறுதலையாகும். இப்பேறை இவ்வாறு ஒரு தேற்றமாக எழுதலாம்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தின் மறுதலை

ஒரு நேர்கோடு முக்கோணியொன்றின் இரண்டு பக்கங்களை விகிதசமனாகப் பிரிக்குமாயின் அந்நேர்கோடு எஞ்சிய பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகும்.

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணித்தல், ஏறிகளை நிறுவுதல் என்பன உட்பட்ட சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 1



உருவிலுள்ள தகவல்களின் படி $AX : XF$ இன் பெறுமானம் காண்க.

முக்கோணி ABC ஐக் கருதும்போது $AD : DB = 4 : 3$ உம்

$AE : EC = 6 : 4.5 = 4 : 3$ உம் என்பதால்

$AD : DB = AE : EC$ ஆகும்.

$\therefore$ AB, AC ஆகிய கோடுகள், கோடு DE இனால் விகிதசமனாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி $DE//BC$ ஆகும்.

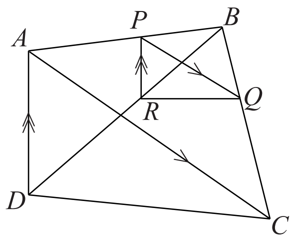
அப்போது முக்கோணி ABF இல் $DX//BF$ என்பதால்,

$AD : DB = AX : XF$

$AD : DB = 4 : 3$ என்பதால்,

$AX : XF = 4 : 3.$

உதாரணம் 2



புள்ளி P ஆனது நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் பக்கம் AB யின் மீது அமைந்துள்ளது. AC யிற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாக வரையப்பட்ட கோடு பக்கம் BC யை Q விலும் AD யிற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாக வரையப்பட்ட கோடு BD என்னும் கோட்டை R இலும் சந்திக்கின்றன. $RQ//DC$ என நிறுவுக.

நிறுவல் : முக்கோணி ABD யில் பக்கம் AD ஆனது PR இற்கு சமாந்தரம் என்பதால்

$BP : PA = BR : RD$ ——①

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AC ஆனது PQ இற்கு சமாந்தரம் என்பதால்

$BP : PA = BQ : QC$ ——②

சமன்பாடுகள் ①, ② இலிருந்து

$BR : RD = BQ : QC$ எனப் பெறப்படும்.

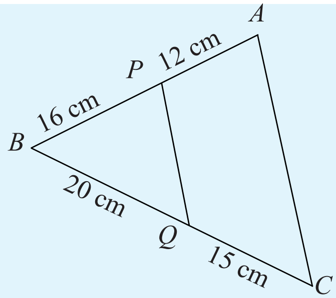
$\therefore$ முக்கோணி BDC யில் BD, BC ஆகிய பக்கங்கள் கோடு RQ இன் மூலம் விகித சமனாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ $RQ//DC$ (மறுதலைத் தேற்றத்தின்படி)

மேலே தரப்பட்டுள்ள மறுதலைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

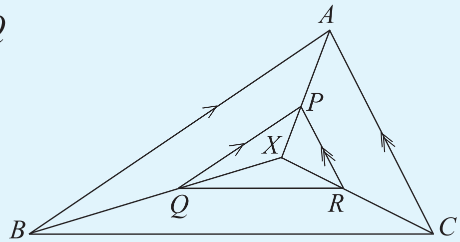
பயிற்சி 14.3

1. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி AC, PQ என்பவை சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

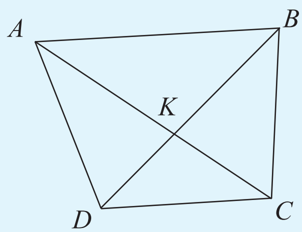


2. முக்கோணி ABC யில் $AP : PB = AQ : QC$ ஆகுமாறு பக்கம் AB யின் மீது புள்ளி P உம் பக்கம் AC இன் மீது புள்ளி Q உம் அமைந்துள்ளன. $Q\hat{P}B + P\hat{B}C = 180°$ என நிறுவுக.

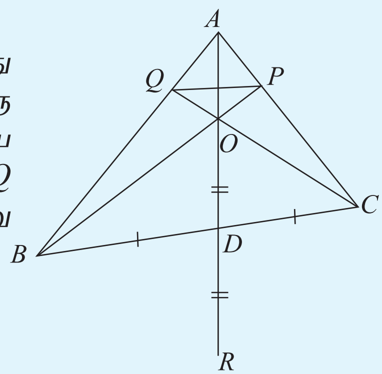
3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AC//PR$ உம் $AB//PQ$ உம் ஆகும். $BC//QR$ என நிறுவுக.



4. உருவிலுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AC, BD ஆகிய மூலை விட்டங்கள் K இல் இடைவெட்டுகின்றன. $AK = 4.8$ cm, $KC = 3.2$ cm, $BK = 3$ cm, $KD = 2$ cm ஆயின் DC ஆனது AB யிற்குச் சமாந்தரம் என நிறுவுக. (சாடை : முக்கோணி KDC யில் நீட்டப்பட்ட DK, CK ஆகியவற்றின் மீது முறையே B, A ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன எனக் கொள்க.)

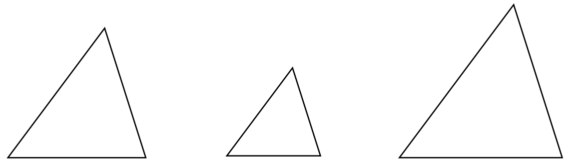


5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி D ஆகும். O என்பது AD யின் மீது அமைந்துள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட BO ஆனது AC யை P யிலும் நீட்டப்பட்ட CO ஆனது AB யை Q விலும் இடைவெட்டுகின்றன. $OD = DR$ ஆகுமாறு பக்கம் AD ஆனது R வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது.

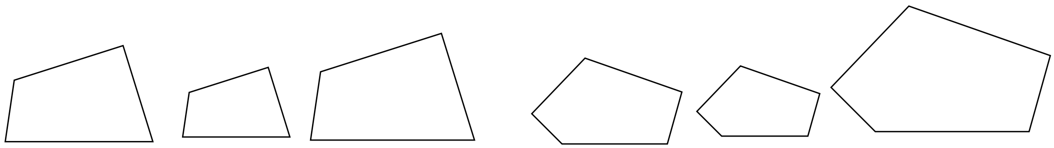


(i) $BRCO$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.
(ii) $AQ : QB = AO : OR$ என நிறுவுக.
(iii) $QP//BC$ என நிறுவுக.

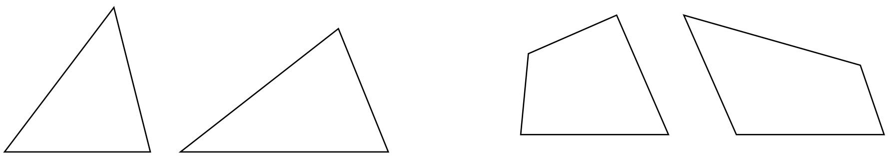
14.4 இயல்பொத்த உருவங்கள்



இம்மூன்று முக்கோணிகளும் ஒரே "வடிவிலான" முக்கோணிகள் என நாம் வழக்கமாக அறிமுகம் செய்வோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் ஒரே வடிவிலான மூன்று நாற்பக்கல்களும் மூன்று ஐங்கோணிகளும் உள்ளன.



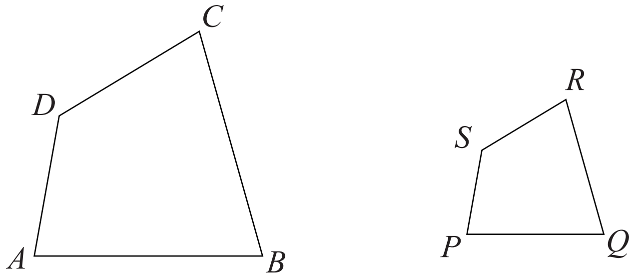
ஆயினும் கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிச் சோடியைப் போன்றே நாற்பக்கற் சோடியையும் ஒரே வடிவில் இல்லாதிருப்பதைக் காண்பீர்கள்.



இங்கு "வடிவம் என்பதால் கருதப்படுவது யாது என்பதைப் பற்றி சிந்தித்தீர்களா? கணிதத்தில் அனைத்தையும் இயன்றவரை சரியாக வரைவிலக்கணப்படுத்த வேண்டும். எனவே "வடிவம்" என்பதற்குச் சரியான வரைவிலக்கணத்தை வழங்குவது அவசியமாகும். பொது வழக்கில் பயன்படுத்தும் "ஒரே வடிவம்" என்பதற்கு கணித்தில் பயன்படுத்தப்படும் சொல் "இயல்பொத்தது" என்பதாகும். இங்கு பல்கோணியின் இயல்பொத்த தன்மை பற்றி மாத்திரம் கவனத்தில் கொள்வோம். இரண்டு பல்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் கூறப்படுவது அப்பல்கோணிகள் இரண்டினதும்,

1. கோணங்கள் சமனாகவும்
2. ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாகவும் இருக்கும் போதேயாகும்.

உதாரணமாக கீழே தரப்பட்டுள்ள $ABCD$, $PQRS$ ஆகிய இரண்டு நாற்பக்கல்களையும் கருதுக.



இரண்டு நாற்பக்கல்களிலும்

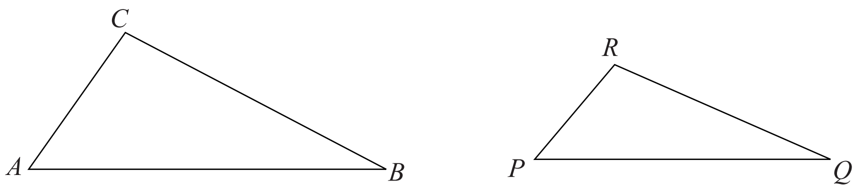
$\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}, \hat{D} = \hat{S}$ ஆகவும்.

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$ ஆகவும் இருப்பின்

$ABCD$, $PQRS$ ஆகிய இரண்டு நாற்பக்கல்களும் இயல்பொத்தவை ஆகும். இப்பாடத்தில் இயல்பொத்த முக்கோணிகள் பற்றியே மேலும் கற்க இருக்கின்றோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள ΔABC, ΔPQR ஆகியவற்றில்

$\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}$ உம்

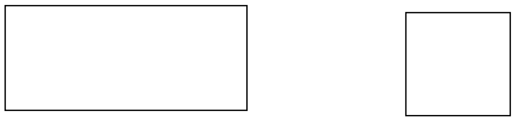
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ உம் ஆயின் வரைவிலக்கணத்தின் படி அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவை ஆகும்.



அவ்வாறிருப்பினும் முக்கோணிகளின் இயல்பொத்த தன்மை தொடர்பாக மிக முக்கியமான ஒரு பேறு உள்ளது. அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளின் கோணங்கள் சமனாயின் அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவை ஆகும். இதனை இன்னொரு விதமாக கூறுவதாயின் இரண்டு முக்கோணிகளின் கோணங்கள் சமனாயின் அப்போது அம்முக்கோணிகள் இரண்டினதும் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனானவை ஆகும். இதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை ஆவதற்கு அம்முக்கோணிகள் இரண்டினதும் கோணங்கள் சமனானவையா எனப் பரீட்சித்துப் பார்த்தல் போதுமானது.

உதாரணமாக மேலே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு முக்கோணிகளினதும் $\hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q}, \hat{C} = \hat{R}$ ஆயின் அப்போது $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ஆகும்.

இப்பேறு முக்கோணி அல்லாத பல்கோணிகளுக்கு உண்மை ஆகாது. உதாரணமாக கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு நாற்பக்கல்களினதும் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும். அவை யாவும் 90° வீதம் உள்ளவை. அவற்றில் ஒன்று செவ்வகமும் மற்றையது சதுரமும் ஆகும். எனவே அவற்றின் பக்கங்கள் விகிதசமனாக முடியாது. எனவே இரண்டு நாற்பக்கல்களும் இயல்பொத்தவை அல்ல.



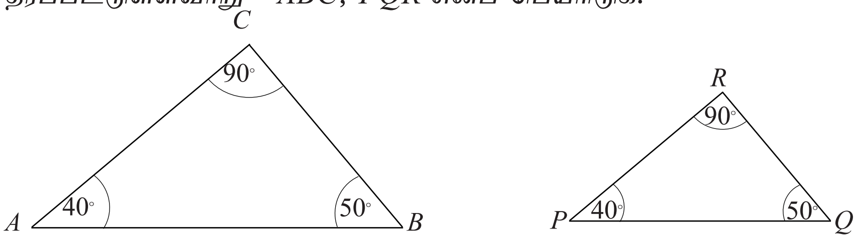
இரண்டு பல்கோணிகளின் கோணங்கள் சமனானவை ஆயின் அவை சமகோணமானவை எனப்படும். மேற்குறித்த கலந்துரையாடல்களுக்கேற்ப சமகோணமுடைய இரண்டு முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை ஆகும். இப்பெறுபேற்றை நிறுவுதலின்றி ஒரு தேற்றமாக நாம் பயன்படுத்துவோம்.

இயல்பொத்த முக்கோணித் தேற்றம்:
இரண்டு முக்கோணிகள் சமகோணமுடையவை ஆயின் அம்முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமமானவை ஆகும்.

இப்பேற்றை மிக நன்றாக விளங்கிக் கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி 40°, 50°, 90° கோணங்களைக் கொண்டு அளவில் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட இரண்டு முக்கோணிகளை வரைக. அவற்றை கீழே தரப்பட்டுள்ளவாறு ABC, PQR எனப் பெயரிடுக.



- இரண்டு முக்கோணிகளினதும் ஒத்த பக்கங்களுக்கிடையிலான விகிதங்களைக் (பின்ன வடிவில்) காண்க. அதாவது $\frac{AB}{PQ}$, $\frac{BC}{QR}$, $\frac{CA}{RP}$ ஆகிய பெறுமானங்களை வெவ்வேறாகக் காண்க.
- மேற்குறித்த மூன்று பெறுமானங்களும் சமனானவையா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க. (அளவுகளில் ஏற்படும் வழுக்கள் காரணமாக உங்களுக்குக் கிடைக்கும் பெறுமானங்களில் சில வழுக்கள் இருக்கலாம்.)

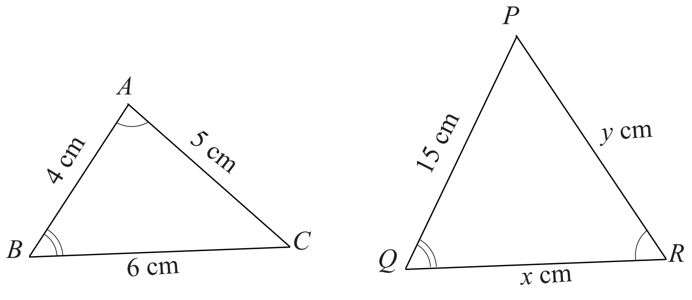
மேற்குறித்த செயற்பாட்டின்படி இரண்டு சமகோண முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனாகின்றன என்பதை அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளும் இயல்பொத்தவை என்பதை நீங்கள் புரிந்துகொண்டிருப்பீர்கள்.

குறிப்பு :

1. இரண்டு முக்கோணிகள் தொடர்பாக சமகோணமானவை, இயல்பொத்தவை ஆகிய இரண்டு சொற்களுக்கும் ஒரே கருத்து உண்டு.
2. ஒருங்கிசைவான இரண்டு முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை என்பது தெளிவாகும். ஆயினும் இயல்பொத்த இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவனவாய் இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை.
3. ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்கள் இன்னொரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்களுக்கும் சமனாயின் எஞ்சிய கோணங்களும் சமனாகும். இதற்கான காரணம் எந்தவொரு முக்கோணியிலும் எல்லாக் கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆக இருப்பதுவே ஆகும். எனவே இரண்டு முக்கோணிகள் சமகோணமுடையவை ஆவதற்கு ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்கள் மற்றைய முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமனாயிருப்பது போதுமானது.

உதாரணம் 1

உருவிலுள்ள ABC, PQR ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளில் $\hat{A} = \hat{R}$ உம் $\hat{B} = \hat{Q}$ உம் ஆகும். முக்கோணி PQR இல் x, y ஆகியவற்றின் மூலம் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் காண்க.



ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$\hat{A} = \hat{R}$, $\hat{B} = \hat{Q}$

$\therefore \quad \hat{C} = \hat{P}$

(ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

$\therefore$ ABC, PQR ஆகியன இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிகள் ஆகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமமானவை ஆகும்.

அப்போது; $\dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{AB}{QR}$

$\therefore \quad \dfrac{6}{15} = \dfrac{4}{x}$

$6x = 15 \times 4$ (குறுக்குப் பெருக்கத்தால்)

$\therefore \quad x = \dfrac{15 \times 4}{6}$

$= 10$ cm

$\dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$

$\dfrac{6}{15} = \dfrac{5}{y}$

$6y = 15 \times 5$

$y = \dfrac{15 \times 5}{6}$

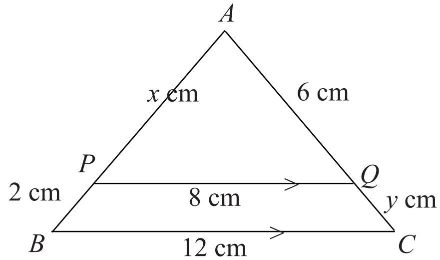
$= 12.5$ cm

உதாரணம் 2

முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC யிற்கு சமாந்தரமாக PQ வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) ABC, APQ ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் காட்டுக.

(ii) x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



(i) ABC, APQ ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளில்

$A\hat{B}C = A\hat{P}Q$ (ஒத்த கோணங்கள் $BC//PQ$)

$A\hat{C}B = A\hat{Q}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $BC//PQ$)

$\hat{A}$ இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவானது

$\therefore$ ABC, APQ ஆகியன இரண்டும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

(ii) ABC, APQ ஆகிய இரண்டும் இயல்பொத்த முக்கோணிகள் என்பதால், தேற்றத்தின்படி ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆகும்.

$\therefore \quad \dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{AB}{AP}$

$\therefore \quad \dfrac{12}{8} = \dfrac{x+2}{x}$

$12x = 8\,(x + 2)$

$12\,x = 8x + 16$

$12\,x - 8x = 16$

$4x = 16$

$x = 4$ cm

$\dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{AC}{AQ}$

$\dfrac{12}{8} = \dfrac{6+y}{6}$

$8\,(6 + y) = 6 \times 12$

$48 + 8y = 72$

$8y = 72 - 48$

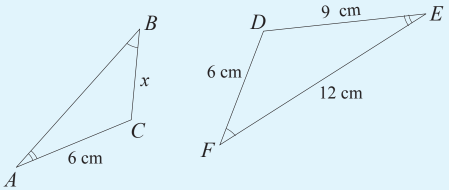
$8y = 24$

$y = 3$ cm

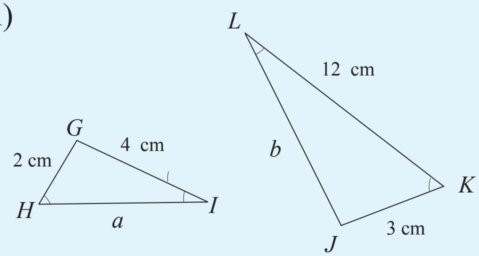
பயிற்சி 14.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணிச் சோடியிலும் தெரியாக் கணியத்தினால் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

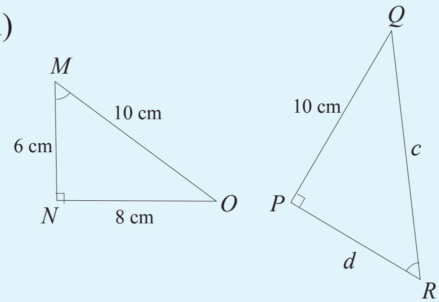
(i)



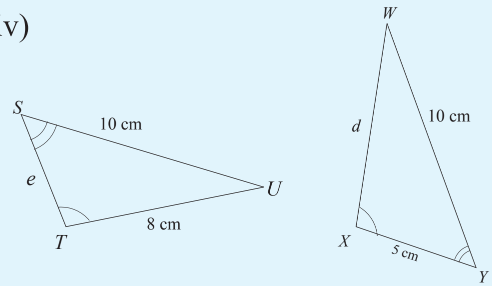
(ii)



(iii)

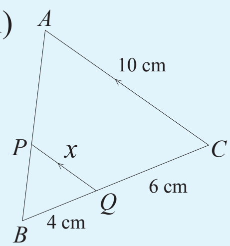


(iv)

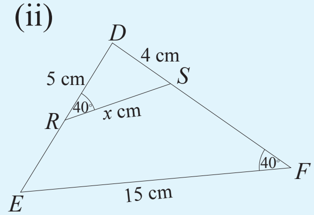


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் உள்ள முக்கோணிச் சோடிகளை இயல்பொத்தவை எனக் காட்டி அங்கு தெரியாக் கணியங்கள் மூலம் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

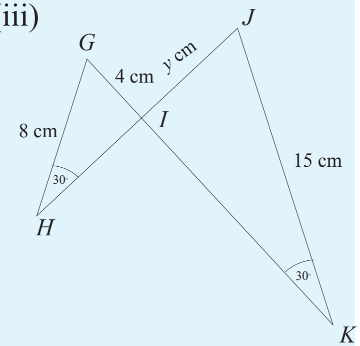
(i)



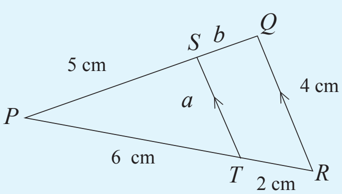
(ii)



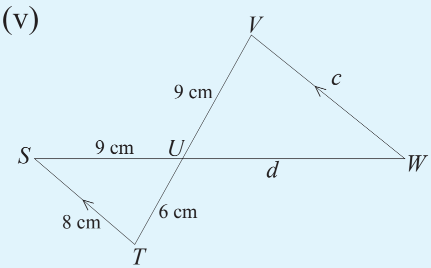
(iii)



(iv)



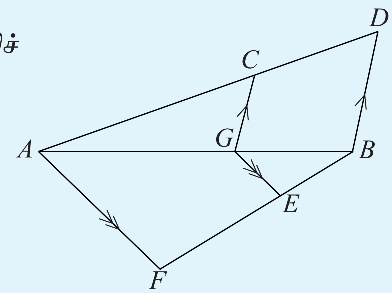
(v)



3. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி,

(i) இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.

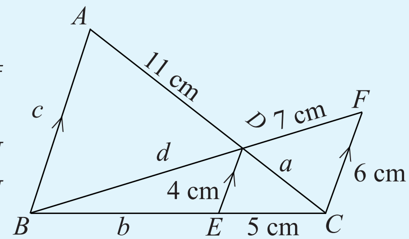
(ii) $BD = 9$ cm, $GC = 6$ cm, $AG = 12$ cm, $GE = 2$ cm ஆயின் GB, AF ஆகிய நீளங்களைக் காண்க.



4. உருவிலுள்ள தகவல்களின்படி,

(i) மூன்று இயல்பொத்த முக்கோணிச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.

(ii) உருவில் a, b, c, d ஆகியவற்றின் மூலம் தரப்பட்டுள்ள நீளங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



நாம் இனி ஆராயவிருப்பது மேற்குறித்த தேற்றத்தின் மறுதலையைப் பற்றி ஆகும். அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளில் பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆயின் அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் இயல்பொத்தவையாகுமா என்பதைப் பற்றி ஆகும். அம்மறுதலையும் உண்மையான ஒரு பெறுபேறாகும்.

மேலும்,
ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் இன்னொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் விகித சமனாயின் இரண்டு முக்கோணிகளும் இயல்பொத்தவை ஆகும்.

இப்பெறுபேற்றை மிகத் தெளிவாகப் விளங்கிக் கொள்வதற்காகக் கீழேயுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு

- $AB = 2.5$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 3.5$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க.
- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm, $PR = 7$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR ஐ அமைக்க.
- $\frac{AB}{PQ}, \frac{BC}{QR}, \frac{AC}{PR}$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களுக்கிடையிலான தொடர்புகளைப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.
- ஒவ்வொரு முக்கோணியினதும் மூன்று கோணங்களையும் வெவ்வேறாக அளந்து கொள்க.
- அதற்கேற்ப ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகள் எவ்வகையானவை?

முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்களுக்கிடையிலான விகிதங்கள் சமனானவை எனவும் முக்கோணி ABC யின் மூன்று கோணங்களும் முக்கோணி PQR இன் மூன்று கோணங்களுக்கும் சமனானவை எனவும் செயற்பாட்டின் மூலம் காணக் கூடியதாயிருக்கும்.

இப்பேறை இதற்கு முன்னர் கற்ற இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் தேற்றத்தின் மறுதலையாக இவ்வாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம்: ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் இன்னுமொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் விகித சமனாகுமாயின் அவ்விரண்டு முக்கோணிகளும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

உதாரணம் 1

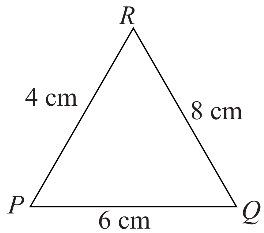
உருவில் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு ஏற்ப, ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் காரணங்களுடன் காட்டுக. ஒன்றுக்கொன்று சமனாகும் கோணச் சோடிகளைப் பெயரிடுக.

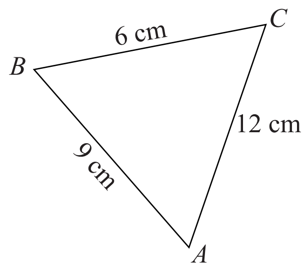
இரண்டு முக்கோணிகளிலும் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்களுக்கேற்ப, விகிதங்களை எழுதினால்,

(i) $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{RQ}{CA} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

(iii) $\dfrac{PR}{BC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$





இவ்விகிதங்கள் சமனானவை என்பதால், தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி PQR, ABC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை ஆகும்.

முக்கோணி PQR இல், PQ இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{R}$

PR இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{Q}$

QR இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{P}$

முக்கோணி ABC இல் AB இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{C}$

BC இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{A}$

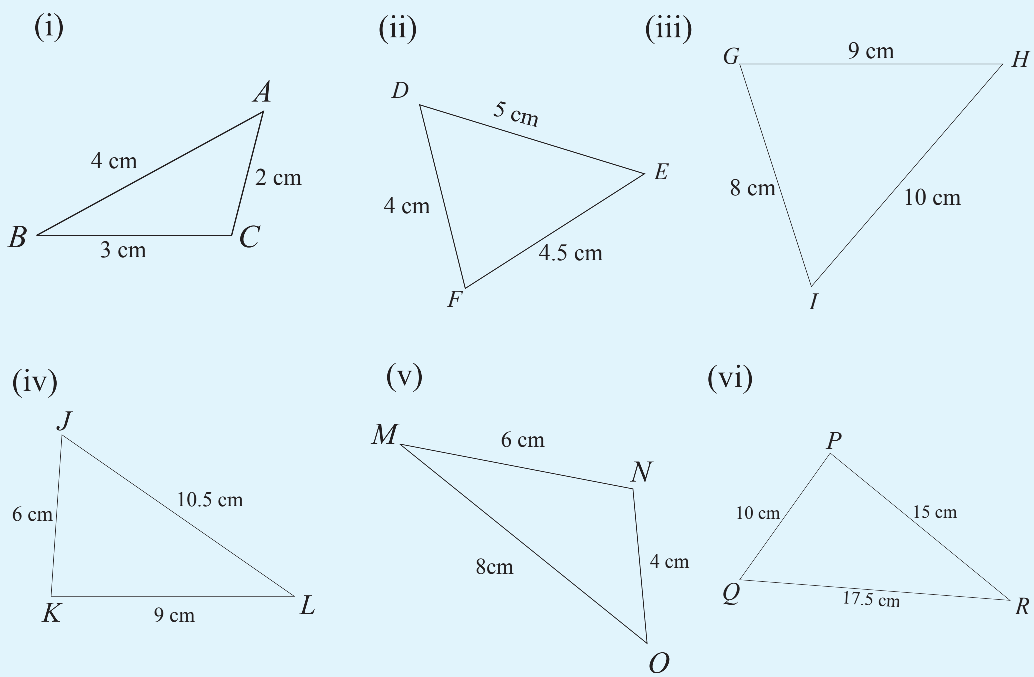
AC இற்கு எதிரான கோணம் $\hat{B}$

$\therefore\ \hat{P} = \hat{B},\ \hat{Q} = \hat{A},\ \hat{R} = \hat{C}$

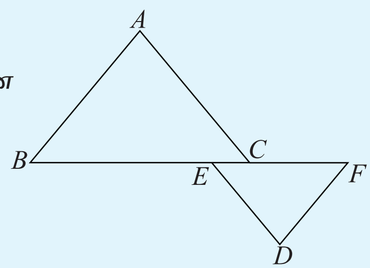
"பக்கங்களுக்கிடையிலானவிகிதங்கள்சமனாகவுள்ளமுக்கோணிகள்இயல்பொத்தவை ஆகும்" என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கீழே உள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுங்கள்.

பயிற்சி 14.5

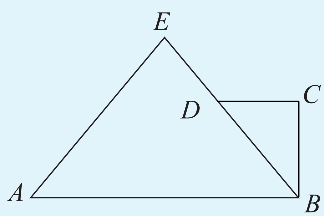
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அளவுகளுடனான முக்கோணிகளின் பருமட்டான உருவங்களிலிருந்து மூன்று இயல்பொத்த முக்கோணச் சோடிகளைத் தெரிக.



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{BC}{DF}$ ஆகும். $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ ஆகிய கோணங்களுக்கு சமமான வேறொரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.



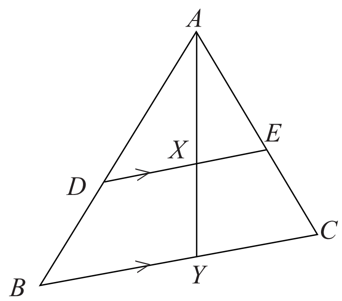
3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AB = 20$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $DB = 8$ cm, $DE = 2$ cm $AE = 15$ cm உம் ஆகும். $AB // DC$ எனக் காட்டுக. மேலும் நீட்டப்பட்ட CD யை AE ஆனது F இல் சந்திக்கின்றது. எனின் AF இன் நீளத்தைக் காண்க.



14.5 இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் தேற்றத்திலிருந்து எறிகளின் நிறுவல்கள்

இதுவரை கற்ற தேற்றங்களை தேவைக்கேற்பப் பயன்படுத்தி ஏறிகளின் நிறுவல்களைச் செய்யும் முறைகளை இப்போது கற்போம். இதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களைக் கற்க.

உதாரணம் 1



முக்கோணி ABC இல் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் மீது $DE//BC$ ஆகுமாறு D, E ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. DE யை X இலும். BC யை Y யிலும் வெட்டுமாறு AY வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) $\dfrac{XE}{YC} = \dfrac{AX}{AY}$ எனவும்

(ii) $\dfrac{XE}{YC} = \dfrac{DX}{BY}$ எனவும்

நிறுவுக.

நிறுவல் : உருவிலுள்ள AXE, AYC ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளில்

$A\hat{X}E = A\hat{Y}C$ (ஒத்த கோணங்கள், $XE//YC$)

$A\hat{E}X = A\hat{C}Y$ (ஒத்த கோணங்கள், $XE//YC$)

$\hat{A}$ இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவானது

$\therefore$ AXE, AYC ஆகியன இரண்டு இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆகும்.

அப்போது $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{XE}{YC}$ (தேற்றத்தின் படி)

(ii) உருவிலுள்ள ADX, ABY ஆகிய முக்கோணிகளில்

$A\hat{D}X = A\hat{B}Y$ (ஒத்த கோணங்கள், $DX//BY$)

$A\hat{X}D = A\hat{Y}B$ (ஒத்த கோணங்கள், $DX//BY$)

$\hat{A}$ இரண்டு முக்கோணிகளுக்கும் பொதுவானது

$\therefore$ ADX, ABY ஆகியன இரண்டும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனானவை ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{AX}{AY} = \frac{DX}{BY}$$

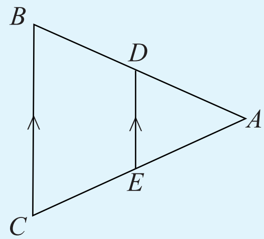
ஆனால் $\frac{AX}{AY} = \frac{XE}{YC}$ (நிறுவியது)

$$\therefore \quad \frac{XE}{YC} = \frac{DX}{BY}$$

இனி கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுவோம்.

பயிற்சி 14.6

1. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

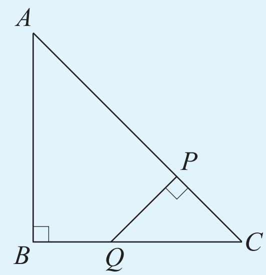


(i) ADE, ABC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனக் காட்டுக.

(ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ என நிறுவுக.

(iii) $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC}$ என நிறுவுக.

2. உருவில் தரப்பட்டள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

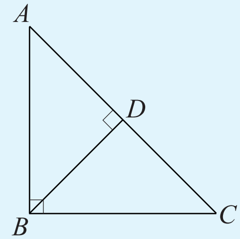


(i) ABC, PQC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை எனவும்

(ii) $\frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{AB} = \frac{PC}{BC}$ எனவும்

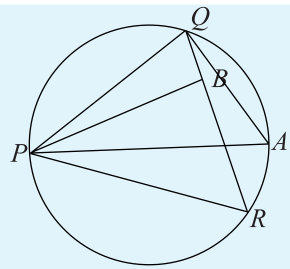
நிறுவுக.

3. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். B யிலிருந்து AC யிற்கு வரைந்த செங்குத்து BD ஆகும்.



$AB^2 = AD.\, AC$ என நிறுவுக.

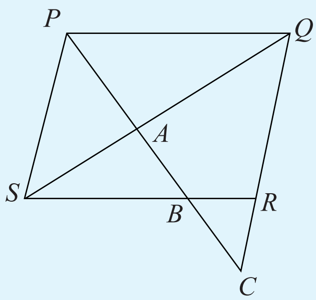
4. PA என்பது முக்கோணி PQR இன் சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். P லிருந்து QR இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து PB ஆகும்.



(i) PQA, PBR ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை என நிறுவுக.

(ii) $\dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PA}{PR}$ என நிறுவுக.

5. இணைகரம் $PQRS$ இல் கோணம் $Q\hat{P}S$ இன் இருசமகூறாக்கியானது மூலைவிட்டம் QS ஐ A இலும் பக்கம் SR ஐ B யிலும் வெட்டிச் சென்று நீட்டப்பட்ட QR ஐ C யில் சந்திக்கின்றது.



$\dfrac{PQ}{PS} = \dfrac{PC}{PB}$ என நிறுவுக.

6. முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AB யின் மீது P உம் பக்கம் AC யின் மீது Q வும் $A\hat{P}Q = A\hat{C}B$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $AP.AB = AQ.AC$ என நிறுவுக.

7. முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $B\hat{A}C$ இன் இருசமகூறாக்கியின் மூலம் பக்கம் BC ஆனது Q விலும் வட்டமானது P யிலும் வெட்டப்படுகின்றன. $AC : AP = AQ : AB$ என நிறுவுக.

8. முக்கோணி ABC யில் $B\hat{A}C$ யின் இருசம கூறாக்கியானது பக்கம் BC யை D யில் சந்திக்கின்றது. $CX = CD$ ஆகுமாறு நீட்டப்பட்ட AD யின் மீது புள்ளி X அமைந்துள்ளது.

(i) ACX , ABD ஆகியன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் எனவும்

(ii) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ எனவும் நிறுவுக.

பலவினப் பயிற்சி

1. செவ்வகம் $ABCD$ இல் $A\hat{E}B = 90^{\circ}$ ஆகுமாறு DC இன் மீது புள்ளி E அமைந்துள்ளது. ADE, AEB, EBC ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை என நிறுவுக.

2. முக்கோணி ABC யில் $\hat{B}$ செங்கோணமாகும். $AB = 5$ cm, $BC = 2$ cm ஆகும். AC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியானது பக்கம் AB யை Q வில் சந்திக்கின்றது. $AQ = 2.9$ cm எனக் காட்டுக.

3. முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB ஐ P யிலும் பக்கம் AC யை Qவிலும் சந்திக்குமாறு, BC யிற்கு சமாந்தரமாக PQ வரையப்பட்டுள்ளது. CP, BQ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றையொன்று S இல் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் BC ஐ R இல் சந்திக்குமாறு AB யிற்கு சமாந்தரமாக SR வரையப்பட்டுள்ளது.
$\frac{BR}{RC} = \frac{AQ}{AC}$ என நிறுவுக.

15 தரவுகளை வகைகுறித்தல்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின்

- வகுப்பு எல்லையை, வகுப்பு வரைப்பைக் காண்பதற்கும்
- வலையுருவரையத்தை வரைவதற்கும்
- மீடிறன் பல்கோணியை வரைவதற்கும்
- திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவதற்கும் அதிலிருந்து காலணை இடைவீச்சைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வகுப்பாயிடையின் எல்லையும் வரைப்பும்

30 மாணவர்களின் உயரங்களை (கிட்டிய சென்றிமீற்றரில்) அளந்து பெறப்பட்ட ஒரு தரவுத் தொகுதி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

137, 135, 141, 147, 151, 135, 137, 143, 144, 145
140, 134, 141, 140, 153, 144, 133, 138, 155, 130
136, 137, 142, 143, 145, 143, 154, 146, 148, 158

தரவுகளிலுள்ள கூடிய பெறுமானத்திலிருந்து குறைந்த பெறுமானத்தைக் கழிக்கும்போது பெறப்படும் பெறுமானம் **வீச்சு** என அழைக்கப்படுகின்றது என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது

தரவுகளின் வீச்சு $= 158 - 130$
$= 28$

கற்பதை இலகுவாக்குவதற்காக ஒரு தரவுத் தொகுதி ஒரு மீடிறன் பரம்பலாகப் பெரும்பாலும் தரப்படும். தரவுகளின் வீச்சு அதிகமாக உள்ளபோது தரவுகள் வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து எழுதப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம். அவ்வாறு வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து எழுதப்படுகின்ற மீடிறன் பரம்பல்கள் **கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல்கள்** எனப்படும். ஆயிடைகளின் எண்ணிக்கை பொதுவாக 5 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலான ஒரு பெறுமானமாக இருக்கும். இவ்வாறான ஒரு பரம்பலின் வகுப்பாயிடையின் பருமன் எனப்படுவது மீடிறன் பரம்பலின் வீச்சை வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையால் வகுப்பதால் பெறப்படும் பெறுமானத்திலும் கூடிய நிறைவெண்களில் குறைந்த பெறுமானத்தையே ஆகும்.

உதாரணமாக மேலே குறிப்பிட்ட தரவுகளை 6 வகுப்பாயிடைகளாகக் கோவைப்படுத்துவோமானால் வகுப்பாயிடையின் பருமனைக் காண்பதற்காக முதலில் வீச்சாகிய 28 ஐ வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையாகிய 6 இனால் வகுப்போம்.

$$= \frac{28}{6}$$

$\approx$ 4.66 பெறப்படும்.

எனவே, வகுப்பாயிடையின் பருமனாகத் தெரிவு செய்ய வேண்டியது, 4.66 இலும் கூடிய நிறைவெண்களில் குறைந்த பெறுமானமாகிய 5 ஐயே ஆகும். பின்னர் முதலாவது வகுப்பாயிடையினைத் தெரிவுசெய்ய வேண்டும். தரவுகளின் குறைந்த பெறுமானம் 130 என்பதால் முதலாவது வகுப்பாயிடையை 130 இலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும்.

தரப்பட்ட தரவுத் தொகுதியிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட இரண்டு மீடிறன் பரம்பல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
130 - 135	3
135 - 140	7
140 - 145	10
145 - 150	5
150 - 155	3
155 - 160	2

முதலாவது கூட்டமாக்கப்பட்ட பரம்பல்

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
130 - 134	3
135 - 139	7
140 - 144	10
145 - 149	5
150 - 154	3
155 - 169	2

இரண்டாவது கூட்டமாக்கப்பட்ட பரம்பல்

முதலில் முதலாவது பரம்பலைக் கவனத்திற் கொள்ளவும். உதாரணமாக அதிலுள்ள 130 - 135 என்னும் வகுப்பாயிடையினால் தரப்படுவது 130 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 135 இலும் குறைந்த உயரப் பெறுமானங்களாகும். இரண்டாவது வகுப்பாயிடை ஆகிய 135 - 140 இனால் தரப்படுவது 135 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 140 இலும் குறைந்த உயரப் பெறுமானங்களாகும். இவ்வாறாக மற்றைய வகுப்பாயிடைகளையும் விவரிக்கலாம்.

இனி, இரண்டாவது பரம்பலைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். அங்கு உதாரணமாக 130 - 134 என்னும் வகுப்பாயிடையினால் தரப்படுவது 130 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 134 இலும் குறைந்த அல்லது சமனான உயரப் பெறுமானங்களாகும்.

இந்த இரண்டு பரம்பல்களிலும் வகுப்பாயிடை பற்றி அவதானிக்கக்கூடிய பிறிதொரு வேறுபாட்டை இப்போது கவனத்தில் கொள்வோம். முதலாவது பரம்பலில் வகுப்பாயிடைகளுக்கிடையே இடைவெளி இல்லை. உதாரணமாக 130 - 135 வகுப்பாயிடையின் மேல் எல்லையாகிய 135 ஆனது அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆகிய

135 - 140 இன் கீழ் எல்லையாகும். அதாவது இங்கு வகுப்பாயிடைகளில் ஒரு பொது எல்லை உண்டு. ஆயினும் இரண்டாவது பரம்பலில் அவ்வாறிருப்பதில்லை. உதாரணமாக 130 - 134 வகுப்பாயிடையின் மேல் எல்லை 134 ஆக இருப்பதுடன் அடுத்த ஆயிடை 135 இல் ஆரம்பிக்கின்றது. இவ்வெல்லைகளுக்கிடையே வித்தியாசம் 1 ஆகும். இப்பாடத்தில் அடுத்த பகுதியில் நாம் கற்க எதிர்பார்க்கும் வலையுரு வரையத்தை வரைவதற்கு இவ்வாறான இடைவெளி இல்லாதிருக்க வேண்டும். எனவே, இரண்டாவது பரம்பலைப் பொருத்தமானவாறு எல்லைகளை மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும். இங்குள்ள வகுப்பாயிடைகளுக்கு ஒரு பொது எல்லையை அறிமுகஞ் செய்வதன் மூலம் இம்மாற்றம் செய்யப்படுகின்றது. இப்பொது எல்லையை இலகுவாக அறிந்து கொள்ளலாம். உதாரணமாக, இரண்டாவது பரம்பலில் 130 - 134 வகுப்பாயிடையின் மேல் எல்லையாகிய 134 இற்கும் 135 - 139 வகுப்பாயிடையின் கீழ் எல்லையாகிய 135 இற்கும் மத்தியில் அமைந்துள்ள 134.5 என்பது பொது எல்லையாகக் கொள்ளப்படும். இதற்கேற்ப தயாரிக்கப்பட்ட புதிய பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

பொது எல்லையைக் கொண்ட வகுப்பாயிடைகள்	மீடிறன்
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

இங்கு முதலாவது பரம்பலின் எல்லா வகுப்பாயிடைகளிலும் கீழ் எல்லை 0.5 குறைந்துள்ளது என்பதையும் மேல் எல்லைக்கு 0.5 கூட்டப்பட்டுள்ளது என்பதையும் அவதானிக்கவும். இவ்விதியானது முதலாவது மற்றும் கடைசி வகுப்பாயிடைகளுக்கும் செல்லுபடியாகும். இதற்கேற்ப 129.5, 159.5 என்பவை பெறப்பட்டுள்ளன என்பதையும் அவதானிக்கவும். அவ்வாறே இப்புதிய பரம்பலின் வகுப்பாயிடையின் பருமன் 5 ஆகின்றது என்பதையும் அவதானிக்கவும்.

மேற்குறித்த முதலாவது வகையான கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் எளிதானதாகும். ஆயினும் செயன்முறையாக இரண்டாவது வகையிலான பரம்பலை அமைத்தல் இலகுவானதாகும். இந்த இரண்டு வகையிலான பரம்பல்களையும் புள்ளி விவரவியலில் பெரும்பாலும் காணலாம்.

15.1 கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு பரம்பலின் வலையுரு வரையம்

இப்போது கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் தரப்பட்டுள்ளபோது வலையுரு வரையம் வரையும் முறையை ஆராய்வோம். வலையுருவரையம் எனப்படுவது ஓர் எண் பரம்பலில் உள்ள தரவுகளை வரைபுபடுத்தும் ஒரு முறையாகும். இங்கு வகுப்பாயிடைகளின் மீடிறன் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் செவ்வக வடிவிலான நிரல்களின் உயரங்களால் குறிக்கப்படும். எல்லா வகுப்பாயிடைகளினதும் பருமன் சமனாக உள்ள சந்தர்ப்பத்தில் (மேலேயுள்ள பகுதியில் உதாரணத்தில் இருந்தவாறு) வலையுருவரையத்தை வரையும் விதத்தை முதலில் கவனிப்போம்.

ஒரு வலையுருவரையத்தை வரைவதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள படிமுறைகளைப் பின்பற்றுக.

* பொருத்தமான ஓர் அளவிடையைப் பயன்படுத்தி கிடை அச்சின் மீது வகுப்பின் வரையறைகளைக் குறிக்க.
* பொருத்தமான அளவிடையில் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையினதும் மீடிறனின் உயரத்தை குறிக்கும் நிரலை வரைக.

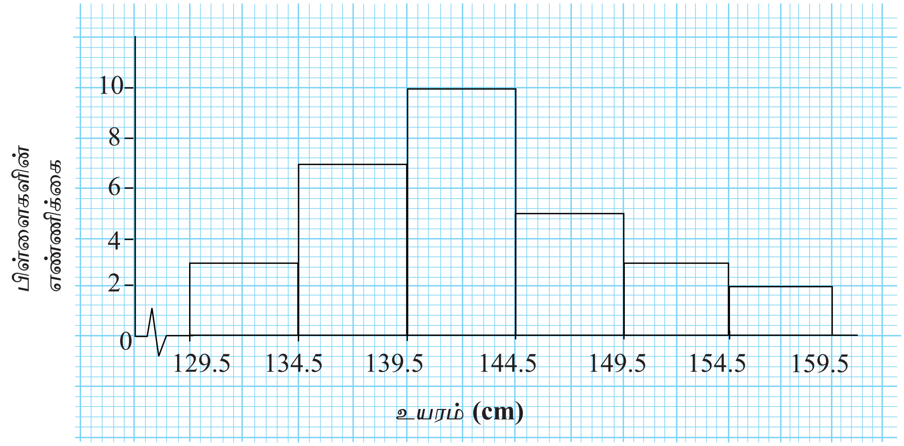
இனிப் பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் ஒரு வலையுருவரையத்தை வரையும் விதத்தை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

மேலேயுள்ள பகுதியில் இருந்த உதாரணத்தில் தயாரித்த கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக. இதற்கு இரண்டாவது வகையிலான மீடிறன் பரம்பலைக் கருதுவோம்.

பொது வரைப்புகளை கொண்ட வகுப்பாயிடைகள்	மீடிறன்
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

உரிய வலையுருவரையம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. கிடை அச்சு வழியே இரண்டு சிறிய கட்டங்களினால் 1 cm குறிக்கப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்து அச்சு வழியே 5 சிறிய கட்டங்களினால் 2 பிள்ளைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளனர்.



இங்கு நிரல்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டிருக்கின்றன என்பதை அவதானிக்கவும்.

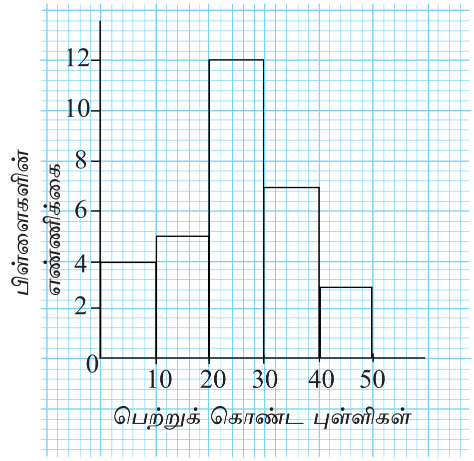
குறிப்பு: இங்கு தரவுகள் 129.5 இல் தொடங்குவதால் 0 இலிருந்து 129.5 வரையிலான வகுப்பாயிடைகளை வலையுருவரையத்தில் காட்டுவது அவசியமற்றதாகும். மேற்குறித்த பகுதி கவனத்தில் கொள்ளப்படவில்லை என்பதைக் காட்டுவதற்காக x அச்சில் தொடக்கத்தில் ⁄\\⁄— என்னும் குறியீடு இடப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 2

பாடசாலை மட்டக் கணிப்பீடொன்றில் பிள்ளைகள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளைக் காட்டும் ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு உதாரணமாக 0 - 10 வகுப்பாயிடையினால் 0 இலும் கூடிய அல்லது சமனான 10 இலும் குறைந்த புள்ளிகள் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவ்வாறே மற்றைய வகுப்பாயிடைகளும் வரையறுக்கப்படும். மீடிறன் பரம்பலைக் குறிக்கும் வலையுரு வரையத்தை வரைக.

வகுப்பாயிடை (பெற்றுக் கொண்ட புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
மீடிறன் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	12	7	3

இம்மீடிறன் பரம்பலின் முதலாவது வகுப்பாயிடை 10 இல் முடிவடைவதுடன் அடுத்த வகுப்பாயிடை 10 இல் தொடங்குகிறது. இங்கு வலையுருவரையத்தை மிக எளிதாக வரையலாம்.



வகுப்பாயிடைகளின் பருமன் சமனற்றதாக உள்ள ஒரு மீடிறன் பரம்பலில் வலையுரு வரையத்தை வரைவது தொடர்பாக இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் கணித பாடத்தில் 40 பிள்ளைகள் பெற்றுக் கொண்ட புள்ளிகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடைகள் (பெற்ற புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
மீடிறன் (பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை)	2	4	6	9	5	8	6

இங்கு வகுப்பாயிடைகளைப் பரீட்சித்துப் பார்க்கும்போது வகுப்பாயிடைகளின் பருமன்கள் சமனாக இல்லாதிருப்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள். முதல் 5 ஆயிடைகளின் பருமன் 10 ஆக இருப்பதுடன் அடுத்து வரும் இரண்டு ஆயிடைகளின் பருமன்கள் முறையே 20, 30 ஆகும். வலையுருவரையமொன்றின் முக்கிய ஒரு பண்பாவது நிரல்களின் பரப்பளவுகள் உரிய மீடிறன்களுக்கு நேர் விகிதசமனாவதாகும். அதற்கேற்ப வகுப்பாயிடைகளின் பருமன் சமனாக உள்ளபோது மீடிறன் நிரலின் உயரத்துக்கு நேர்விகித சமனாகும். எனவே மேலே 1, 2 ஆகிய உதாரணங்களில் மீடிறனை உயரத்தின் மூலம் ஒரே முறையில் காட்ட முடிந்தது. ஆயினும் இங்கு வகுப்பாயிடைகளின் பருமன்கள் சமனாக இல்லாததால் மீடிறனை உயரத்தின் மூலம் ஒரே முறையில் காட்ட முடியாது. நிரலின் உயரத்தை மீடிறனுக்கு நேர்விகிதசமனாகுமாறு அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். அது பின்வருமாறு செய்யப்படும்.

மீடிறன் பரம்பலில் 50 - 70, 70 - 100 தவிர மற்றைய வகுப்பாயிடைகளின் பருமன்கள் 10 ஆகும். 50 - 70 வகுப்பாயிடையின் பருமன் 20 உம் 70 - 100 வகுப்பாயிடையின் பருமன் 30 உம் ஆகும்.
இதற்கேற்ப சிறிய வகுப்பாயிடைகளின் பருமன் 10 ஆகும். 50 - 70 வகுப்பாயிடையின் பருமன் அதன் இரண்டு மடங்காகும் வகுப்பாயிடையின் மீடிறனைக் குறிக்கும் நிரலின் பரப்பளவானது மீடிறனுக்கு நேர்விகித சமன் ஆகவேண்டும் என்பதால்

$$\text{நிரலின் உயரம்} = \frac{\text{மீடிறன்}}{2}$$

எனக் கணிக்கப்படும்.

$\therefore$ 50 - 70 வகுப்பாயிடையின் நிரலின் உயரம் $= \frac{8}{2}$

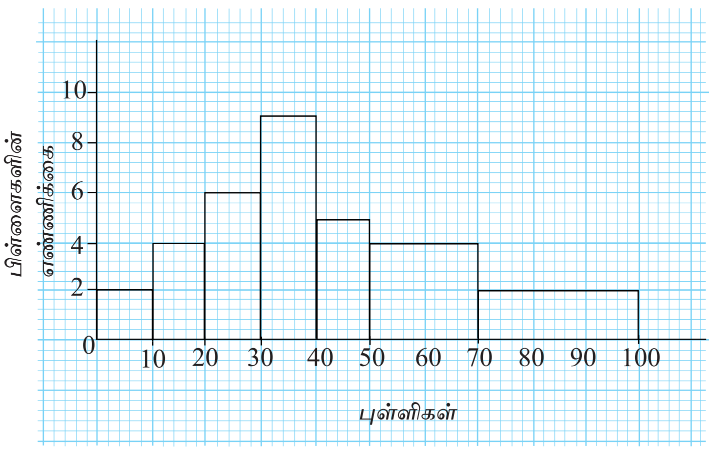
$= 4$

70 - 100 வகுப்பாயிடையின் பருமன் சிறிய வகுப்பாயிடையின் பருமனின் மூன்று மடங்காகும்.

$\therefore$ 70 - 100 வகுப்பாயிடையின் நிரலின் உயரம். $= \frac{6}{3}$

$= 2$ எனக் கணிக்கப்படும்.

இவ்வாறு கணித்தபின் வரைந்த வலையுருவரையம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



பயிற்சி 15.1

1. குறித்த ஒரு பிரதேசத்தின் காலநிலை அவதான நிலையமொன்றிலிருந்து திரட்டப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இத்தகவல்களை ஒரு வலையுருவரையத்தில் தருக.

வகுப்பாயிடை (ஒரு வாரத்தின் மழை வீழ்ச்சி mm இல்)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
மீடிறன் (வாரங்களின் எண்ணிக்கை)	5	6	15	10	7	5	4

2. 2015 ஆம் ஆண்டின் பாடசாலை நூலகமொன்றிலிருந்து தினமும் வாசிப்பதற்காக விநியோகிக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகளைக் காட்டும் ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக.

வகுப்பாயிடை (விநியோகிக்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை)	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54
மீடிறன் (நாட்களின் எண்ணிக்கை)	5	10	20	15	10	7

3. வனவளர்ப்பு திட்டமொன்றில் 10 ஹெக்ரேயரில் இருந்த மரங்களின் சுற்றளவு களை அளந்து திரட்டிய தரவுகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இத்தரவுகளை ஒரு வலையுருவரையத்தில் குறிக்க.

ஒரு மரத்தின் சுற்றளவு (cm)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
மரங்களின் எண்ணிக்கை	6	8	9	15	24	21

4. ஒரு கிராமிய நீர்ப்பாசன செயற்றிட்டமொன்றில் ஒரு மாதத்தில் ஒவ்வொரு வீடுகளிலும் பெற்றுக்கொள்ளப்பட்ட நீரின் அளவு பற்றித் திரட்டிய தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அம்மாதத்தின் வீடுகளின் நீர்ப் பாவனையை ஒரு வலையுரு வரையத்தில் தருக.

பயன்படுத்திய நீரின் அளவு (லீற்றர்)	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	4	6	15	15	10	7	3

5. குறித்த ஒரு கிராமத்தில் உள்ள 75 வீடுகளில் 2015 ஜனவரி மாதம் பயன்படுத்திய மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை பற்றித் திரட்டிய தகவல்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகவல்களை ஒரு வலையுருவரையத்தில் வரைக.

வகுப்பாயிடை (மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
மீடிறன் (வீடுகளின் எண்ணிக்கை)	10	11	14	16	12	12

6. தொலைபேசி வசதி வழங்கப்படும் ஒரு நிலையத்திலிருந்து பெறப்பட்ட அழைப்புகளின் எண்ணிக்கையும் ஒவ்வொரு அழைப்பிற்கும் செலவாகும் நேரமும் பற்றிய தகவல்கள் கீழே மீடிறன் பரம்பலில் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகவல்களை ஒரு வலையுருவரையத்தில் குறிக்க.

ஓர் அழைப்பிற்கு செலவான நேரம் (செக்கன்கள்)	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90	90 - 120
அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை	8	9	12	16	8

15.2 மீடிறன் பல்கோணி

மீடிறன் பல்கோணி எனப்படுவது வலையுருவரையத்தைப் போன்று கூட்டமாக்கப் பட்ட தரவுகளை வரைபுபடுத்தும் ஒரு முறையாகும்.
மீடிறன் பல்கோணியை இரண்டு முறைகளில் அமைக்கலாம்.
* வலையுரு வரையத்திலிருந்தும்
* வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானம், மீடிறன் என்பவற்றிலிருந்தும் அமைக்கலாம்.

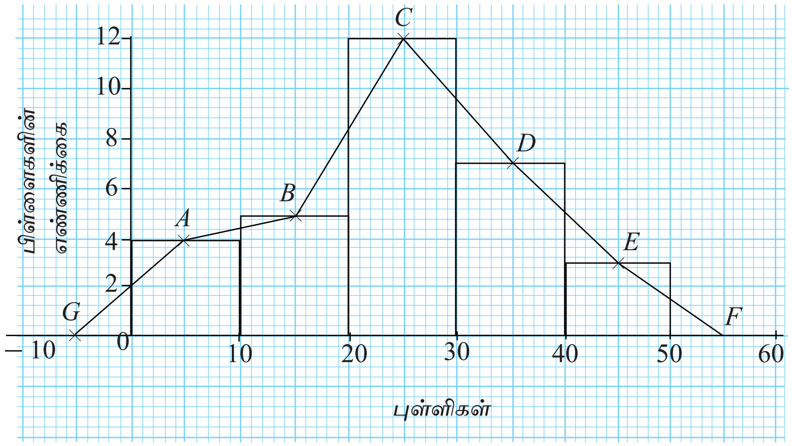
முதலில் வலையுரு வரையத்திலிருந்து ஒரு மீடிறன் பல்கோணியை அமைக்கும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

முன்னைய ஓர் உதாரணத்தில் பயன்படுத்திய ஒரு மீடிறன் பரம்பலை இதற்கென எடுத்துக் கொள்வோம்.

புள்ளிகள்	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	12	7	3

(i) முதலில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கு ஒத்த வலையுரு வரையத்தை வரைக.
(ii) வலையுருவரையத்தின் ஒவ்வொரு நிரலிலும் மேற்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியில் "×" குறியீட்டை இடுக. (பின்வரும் உருவைப் பார்க்க. "×" குறியீடானது A, B, C, D, E எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.)
(iii) இந்த "×" குறியீடுகளை உருவிலுள்ளவாறு முறையே நேர்கோட்டுத் துண்டங்கள் மூலம் இணைக்க.
(iv) ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனின் அரைப்பங்கு தூரத்தை (அதாவது, இங்கு 5 அலகுகள் தூரம்) கடைசி நிரலுக்கு வலது பக்கத்திலும் முதலாவது நிரலுக்கு இடது பக்கத்திலும் அச்சின் மீது குறிக்க. E, F ஐயும் A, G ஐயும் இணைக்க.



இப்போது பல்கோணி *GABCDEF* பெறப்பட்டுள்ளது. இப்பல்கோணி மீடிறன் பரம்பலின் **மீடிறன் பல்கோணி** எனப்படும்.

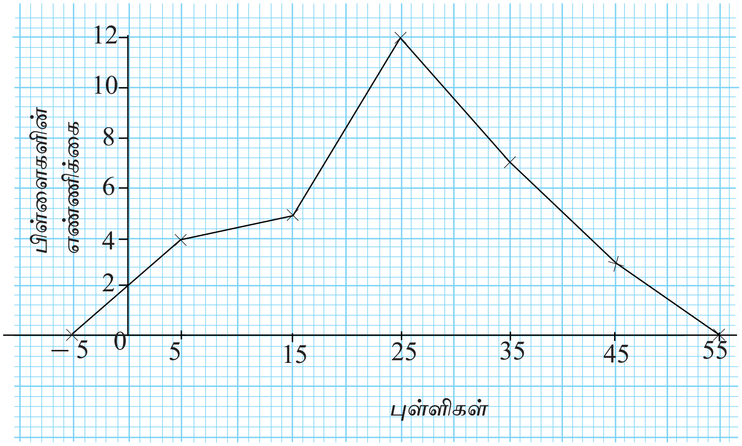
மீடிறன் பல்கோணியின் பரப்பளவு வலையுருவரையத்தின் பரப்பளவுக்குச் சமனாகும் என்பதை நீங்கள் நன்கு அவதானித்தால் காணலாம். எப்போதும் வலையுருவரையத்தை வரைந்த பின்னர் இரண்டாவதாக மீடிறன் பல்கோணியை வரைவது தேவையில்லை. வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானம், மீடிறன் என்பவற்றிலிருந்து மீடிறன் பல்கோணியை நேரடியாக வரையலாம். அவ்வாறு செய்யும் முறையை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள மீடிறன் பரம்பலிலிருந்து ஒரு மீடிறன் பல்கோணியை வரைவதற்காக வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானம் அடங்கிய ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

வகுப்பாயிடை	நடுப்பெறுமானம்	மீடிறன்
0 - 10	5	4
10 - 20	15	5
20 - 30	25	12
30 - 40	35	7
40 - 50	45	3

வகுப்பாயிடைகளின் நடுப் பெறுமானங்களை கிடை அச்சு வழியேயும் மீடிறனை நிலைக்குத்து அச்சு வழியேயும் குறித்து ஆயிடையொன்றின் நடுப்பெறுமானத்திற்கும் மீடிறனுக்கும் ஒத்த புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளை முறையே நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினால் இணைப்பதன் மூலம் மேற்குறித்தவாறே ஒரு மீடிறன் பல்கோணியை வரையலாம்.



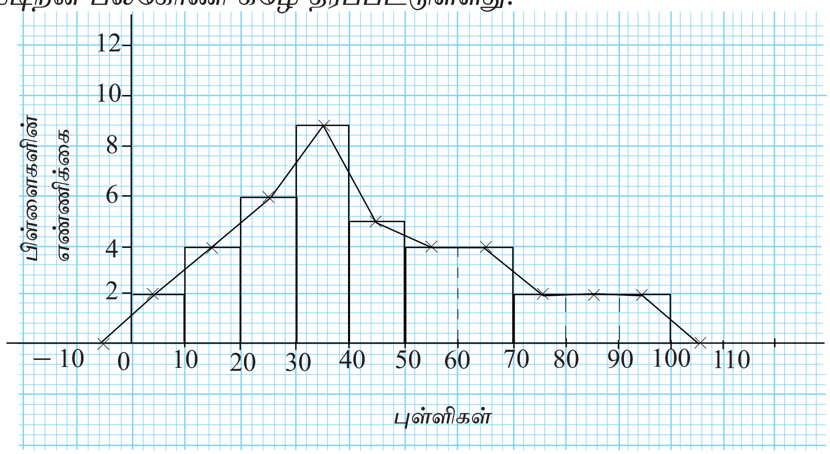
இனி, பருமன் சமனற்ற வகுப்பாயிடைகளை உடைய ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் மீடிறன் பல்கோணியை வரைதல் தொடர்பாக ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

முன்னர் நாம் எடுத்த பருமன் சமனற்ற வகுப்பாயிடைகளையுடைய மீடிறன் பரம்பலுக்கான மீடிறன் பல்கோணியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை (பெற்ற புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
மீடிறன் (பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை)	2	4	6	9	5	8	6

உரிய மீடிறன் பல்கோணி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இங்கு பருமன் 20 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளை பருமன் 10 ஆகவுள்ள இரண்டு வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து அவற்றின் நடுப் புள்ளிகளுக்கு ஒத்த மீடிறன்கள் கவனத்தில் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. அவ்வாறே பருமன் 30 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடையை பருமன் 10 ஆகவுள்ள 3 வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து அவற்றின் நடுப் புள்ளிகளுக்கு

ஒத்த மீடிறன்களும் கவனத்தில் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. இப்போது வலையுரு வரையத்தின் பரப்பளவானது நிரல்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகின்றது என்பதை அவதானிக்கவும்.

பயிற்சி 15.2

1. ஒரு பாடசாலையில் நடாத்தப்பட்ட வைத்திய பரிசோதனை முகாமில் பங்குபற்றிய பிள்ளைகளின் நிறைகளை அளந்து பெறப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

ஒரு பிள்ளையின் நிறை (kg இல்)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	8	10	15	7	15

(i) இத்தகவல்களை ஒரு வலையுரு வரையத்தில் தருக.
(ii) வலையுருவரையத்திலிருந்து மீடிறன் பரம்பலைக் குறிக்கும் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

2. ஒரு நிறுவனம் தனது உற்பத்திப் பொருளாகிய மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தைப் பரீட்சித்துப்பார்ப்பதற்குச் செய்த ஒரு பரிசோதனையில் பெற்ற தரவுகளின்படி தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை (ஒரு மின்குமிழ் ஒளிர்ந்த மணித்தியாலங்களின் எண்ணிக்கை)	100 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800
மீடிறன் (மின்குமிழ்களின் எண்ணிக்கை)	12	10	20	25	15	12

(i) மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக.
(ii) வலையுருவரையத்திலிருந்து மீடிறன் பரம்பலைக் குறிக்கும் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

3. ஒரு விளையாட்டுக் கழகத்தின் அங்கத்தவர்களின் நிறை பற்றித் திரட்டப்பட்டுள்ள தரவுகள் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

உடலின் திணிவு (kg)	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85
அங்கத்தவர்களின் எண்ணிக்கை	10	15	6	4	2

(i) இத்தகவல்களிலிருந்து வகுப்பாயிடைகளின் நடுப் பெறுமானத்தைக் கொண்ட ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(ii) வகுப்பாயிடைகளின் நடுப்பெறுமானத்தைக் கொண்டு மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

4. ஒரு பாடசாலையில் தரம் 11 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் அட்டவணையொன்று கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	0 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை மீடிறன்	6	5	10	7	12

இத்தகவல்களின் வலையுருவரையத்தை வரைந்து அதிலிருந்து தரவுகளைக் குறிக்கும் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

5. குறித்த ஒரு தினத்தில் தொலைபேசி வசதிகள் வழங்கும் ஒரு மத்திய நிலையத்திலிருந்து பெற்றுக் கொண்ட தொலைபேசி அழைப்புகள் மற்றும் அழைப்பு நேரம் தொடர்பாகத் திரட்டப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஓர் அழைப்பிற்குச் செலவான நேரம் (செக்கன்கள்)	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16
அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை	3	9	20	12	6

(i) இம்மீடிறன் பரம்பலின் வலையுருவரையத்தை வரைக.
(ii) அவ்வலையுருவரையத்திலிருந்து மீடிறன் பரம்பலின் மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

15.3 கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் திரள் மீடிறன் வளையி

இது ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் தரவுகளை வரைபுப்படுத்தும் இன்னுமொரு முறையாகும். திரள் மீடிறன் வளையியை வரையும் முறையை பின்வரும் உதாரணத்திலிருந்து ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

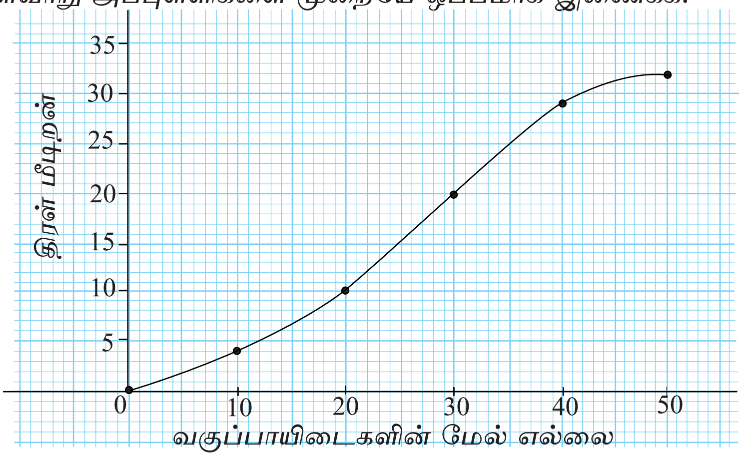
ஒரு வகுப்பிலுள்ள 32 மாணவர்கள் கணிதபாடப் பரீட்சையொன்றில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே உள்ளவாறு மீடிறன் பரம்பலினால் தரப்பட்டுள்ளன. இதன் திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	6	10	9	3

முதலில் மேலேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து ஒரு திரள் மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	திரள் மீடிறன்
0 - 10	4	4
10 - 20	6	10
20 - 30	10	20
30 - 40	9	29
40 - 50	3	32

திரள் என்பதன் கருத்து கூட்டப்பட்ட என்பதாகும். மேலேயுள்ள அட்டவணையில் உதாரணமாக 20 - 30 வகுப்பாயிடைக்குரிய திரள் மீடிறன் 30 இலும் குறைந்த எல்லா மீடிறன்களிலும் கூட்டுத் தொகையாகும் (வேறொரு விதமாக கூறுவதாயின் 30 இலும் குறைவாகப் புள்ளிகளைப் பெற்ற பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்). அது 20 ஆகும். 40 - 50 ஆயிடைக்குரிய திரள் மீடிறன் 50 இலும் குறைவான புள்ளிகளைப் பெற்ற பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையாகும். அதாவது எல்லாப் பிள்ளைகளினதும் எண்ணிக்கையாகிய 32 ஆகும். இவ்வாறு அட்டவணையை அமைத்த பின்னர் திரள் மீடிறனைக் குறிக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளையும் குறிக்க. பின்னர் கீழே உள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு அப்புள்ளிகளை முறையே ஒப்பமாக இணைக்க.



ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் காலணையும் காலணை இடை வீச்சும்

மேலே உள்ள பகுதிகளில் ஒரு தரவுத் தொகுதியின் வலையுரு வரையத்தையும் மீடிறன் பல்கோணியையும் பெற்றுக் கொள்ளும் முறை பற்றி ஆராய்ந்தோம். அதன் மூலம் தரவுகள் பரம்பியுள்ள முறையைப் பற்றி ஒரு கருத்தைப் பெற்றுக் கொள்வது இலகுவானதாகும். உதாரணமாகக் கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு யாது என்பதை வலையுருவரையத்தைப் பார்த்தவுடன் தீர்மானித்துக் கொள்ளலாம். அவ்வாறே தரவுகள் சமச்சீராக பரம்பியுள்ளனவா என்பதைப் பற்றியும் ஒரு கருத்தைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம். இப்பகுதியில் நாம் ஒரு தரவுத் தொகுதியின் காலணை, காலணை இடைவீச்சு பற்றிக் கற்பதற்கு எதிர்பார்க்கின்றோம். அதிலிருந்து தரவுகள் பரம்பியுள்ள விதம் பற்றியும் ஏதேனுமொரு கருத்தைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம்.

ஒரு தரவுத் தொகுதியின் காலணை, காலணை இடைவீச்சு என்பவற்றைக் காண்பதற்காக முதலில் நாம் செய்ய வேண்டியது அத்தரவுகளை ஏறுவரிசையில் எழுதுவதாகும். அதன் பின்னர் முதலாம் காலணை Q_1, இரண்டாம் காலணை Q_2, மூன்றாம் காலணை Q_3 என்பன கணிக்கப்படும்.

படி 1: முதலில் தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க. இது இரண்டாம் காலணை ஆகும்.
படி 2: இடையத்துக்கு இடப்பக்கத்திலுள்ள தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க. இது முதலாம் காலணை ஆகும்.
படி 3: இடையத்துக்கு வலப்பக்கத்திலுள்ள தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க. இது மூன்றாம் காலணை ஆகும்.

உதாரணமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுத் தொகுதியில் தரவுகள் ஏறுவரிசையில் தரவுக் கோவைகளாக (கொத்தாக) எழுதப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 1

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

இங்குள்ள தரவுகளின் எண்ணிக்கை 19 ஆகும். அதற்கேற்ப இதன் இடையம் ஆவது 14 ஆகும். (இது கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.)

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, [14], 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

இனி இடையத்தின் இடப் பக்கத்திலுள்ள ஈட்டுகளின் தொகுதியைக் கருதுக.

5, 6, 6, 8, [11], 12, 12, 12, 13

இங்கு இடையம் ஆவது 11 ஆகும். அதுவும் கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.
இறுதியாக இடையத்தின் இடப் பக்கத்திலுள்ள ஈட்டுகளைக் கருதுக.

14, 14, 17, 18, [20], 24, 25, 26, 30

இங்கு இடையம் 20 ஆகும். அதுவும் கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.

அதாவது, முதலாம் காலணை $= Q_1 = 11$
இரண்டாம் காலணை $= Q_2 = 14$
மூன்றாம் காலணை $= Q_3 = 20$ உம் ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஏறுவரிசையில் எழுதப்பட்டுள்ள 2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 11, 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20 என்னும் 18 தரவுகளின் காலணைகளைக் காண்க.

2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, [8, 11,] 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20

இங்கு இடையம் ஆவது கட்டமிடப்பட்டுள்ள தரவுகளாகிய 8, 11 ஆகியவற்றின் இடையமாகும்.

ஆகவே

$$Q_2 = \frac{8 + 11}{2} = 9.5$$

இடையத்தின் இடப்பக்கத்திலுள்ள தரவுப் பகுதி பின்வருமாறு

2, 2, 3, 6, [6,] 6, 7, 8, 8

இதன் இடையமாகிய 6 கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.
எனவே $Q_1 = 6$.

இறுதியாக இடையத்தின் இடப்பக்கத்திலுள்ள தரவுப் பகுதி பின்வருமாறு

11, 11, 12, 12, [15,] 15, 16, 17, 20

இதன் இடையமாகிய 15 கட்டமிடப்பட்டுள்ளது.
எனவே $Q_3 = 15$.

உதாரணம் 3

கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுத் தொகுதியில் 17 தரவுகள் உள்ளன. அவற்றின் காலணைகளைக் காண்க.

102, 104, 104, 105, 107, 107, 107, 108, 112, 112, 113, 115, 115, 119, 120, 125, 126

மேலே தரப்பட்டுள்ள படிமுறைகளைப் பின்பற்றும்போது பெறப்படும் அம்புக் குறிகளினால் காட்டப்பட்டு காலணைகள் கணிக்கப்பட்டுள்ள முறையைப் புரிந்து கொள்க.

102, 104, 104, [105, 107,] 107, 107, 108, [112,] 112, 113, 115, [115, 119,] 120, 125, 126

$$Q_1 = \frac{105 + 107}{2} = 106 \qquad Q_2 = 112 \qquad Q_3 = \frac{115 + 119}{2} = 117$$

உதாரணம் 4

கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுத் தொகுதியில் 16 தரவுகள் உள்ளன. இங்கு காலணைகள் அமைந்துள்ள இடங்கள் அம்புக்குறிகள் மூலம் காட்டடப்படுகின்றன. காலணைகள் கணிக்கப்பட்டுள்ள முறையை அவதானிக்கவும்.

21, 23, 25, [25, 26,] 28, 28, [30, 30,] 34, 34, [35, 37,] 37, 40, 42

இதற்கேற்ப $Q_1 = \frac{25 + 26}{2} = 25.5$, $Q_2 = \frac{30 + 30}{2} = 30$, $Q_3 = \frac{35 + 37}{2} = 36$.

குறிப்பு: ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் காலணைகளைக் காணும் பல முறைகள் புள்ளி விவரவியல் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இங்கு விவரிக்கப்பட்டுள்ள முறையானது பிரயோக ரீதியாக பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் முறையாகும்.

தற்போது காலணைகளைக் கணிக்கும் இன்னுமொரு முறையைப் பார்ப்போம்.

$Q_1 = \frac{1}{4}(n + 1)$, $Q_2 = \frac{2}{4}(n + 1)$, $Q_3 = \frac{3}{4}(n + 1)$ சூத்திரங்களை பயன்படுத்தி காலணைகள் அமைந்துள்ள இடங்களை காண்பதாகும்.

உதாரணமாக 4 6 7 8 15 18 20 ஆகிய தரவுகளின் காலணைகளைக் காண்க.

இச்சூத்திரங்களுக்கேற்ப தரப்பட்டுள்ள தரவுக் தொகுதியில்

Q_1 அமைவது $\frac{1}{4}(7 + 1) = 2$ ஆம் இடத்திலாகும் இதற்கேற்ப $Q_1 = 6$.

Q_2 அமைவது $\frac{2}{4}(7 + 1) = 4$ ஆம் இடத்திலாகும் இதற்கேற்ப $Q_2 = 8$.

Q_3 அமைவது $\frac{3}{4}(7 + 1) = 6$ ஆம் இடத்திலாகும் இதற்கேற்ப $Q_3 = 18$.

மேலுமொரு உதாரணத்தைக் கருதுவோம். 9 12 18 20 21 23 24 26 ஆகிய தரவுகளின் காலணைகளைக் காண்க.
இச்சூத்திரங்களுக்கேற்ப தரப்பட்டுள்ள தரவுக் தொகுதியில்

Q_1 அமைவது $\frac{1}{4}(8+1) = 2.25$ இதற்கேற்ப, $Q_1 = 12 + \frac{1}{4}(18-12) = 13.5$

Q_2 அமைவது $\frac{2}{4}(8+1) = 4.5$ இதற்கேற்ப $Q_2 = \frac{20+21}{2} = 20.5$

Q_3 அமைவது $\frac{3}{4}(8+1) = 6.75$ இதற்கேற்ப $Q_3 = 23 + \frac{3}{4}(24-23) = 23.75$

இங்கு ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட முறைகளைப் பயன்படுத்துவதால் சிறிய வேறுபாடுகளுடைய விடைகள் பெறப்படலாம். புள்ளிவிவரவியலில் விடைகளுக்காக கிட்டிய பெறுமானங்கள் பெறப்படுவதால் அவ்வாறு சிறு வேறுபாடுகள் இருப்பது பிரச்சனைக்குரியதல்ல.

ஒரு தரவுத் தொகுதியின் காலணை இடைவீச்சு எனப்படுவது மூன்றாம் காலணையிலிருந்து முதலாம் காலணையைக் கழிக்கும்போது பெறப்படும் பெறுமானமாகும்.

அதாவது **காலணை இடைவீச்சு = $Q_3 - Q_1$**

பயிற்சி 15.4

1. ஒரு வேலைத்தளத்தில் பணியாற்றும் ஊழியர்களின் வயதுகள் (ஆண்டுகள்) முறையே கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

21, 22, 23, 24, 25, 27, 27, 30, 34, 35, 40, 41, 42, 44, 46, 47, 50

இத்தரவுத் தொகுதியின்
(i) இடையம்
(ii) முதலாம் காலணை
(iii) மூன்றாம் காலணை
(iv) காலணை இடைவீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு வகுப்பிலுள்ள பிள்ளைகளின் வீடுகளிலுள்ள உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை பற்றித் திரட்டப்பட்ட தரவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

7, 6, 4, 3, 8, 5, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 7, 10, 5

இத்தரவுத் தொகுதியின்
(i) இடையம்
(ii) முதலாம் காலணை
(iii) மூன்றாம் காலணை
(iv) காலணை இடைவீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. 2015 ஆம் ஆண்டு குறித்த ஒரு தினத்தில் நகரமொன்றில் வியாபாரநிலையங்களில் பயன்படுத்தப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை	2	3	4	5	6	7	8	10
வியாபார நிலையங்களின் எண்ணிக்கை	5	2	6	6	7	2	3	1

இத்தரவுத் தொகுதியின்
(i) இடையம்
(ii) முதலாம் காலணை
(iii) மூன்றாம் காலணை
(iv) காலணை இடைவீச்சு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

15.4 காலணை இடை வீச்சு மேலும்

நாம் இப்பகுதியில் கற்க எதிர்பார்ப்பது கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளின் காலணை, காலணை இடை வீச்சு என்பவற்றைக் காணும் முறையாகும். திரள் மீடிறன் வளையியைப் பயன்படுத்தி அவற்றைக் காணும் முறை பற்றி மாத்திரம் இங்கு விபரிக்கப்படுகின்றது. கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்திலிருந்து கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளின் காலணை, காலணை இடைவீச்சு ஆகியவற்றைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

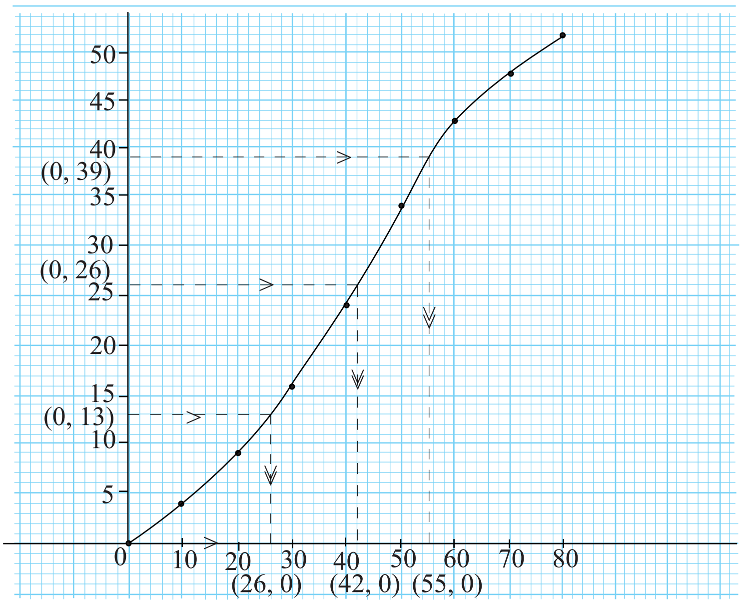
ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் தரம் 11 மாணவர் குழுவினர் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இம்மீடிறன் பரம்பலுக்கான திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை (புள்ளிகள்)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	4	5	7	8	10	9	5	4

பகுதி 15.3 இல் கற்றவாறு திரள் மீடிறன் வளையியை வரைவோம்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	திரள் மீடிறன்
0 - 10	4	4
10 - 20	5	9
20 - 30	7	16
30 - 40	8	24
40 - 50	10	34
50 - 60	9	43
60 - 70	5	48
70 - 80	4	52

அட்டவணையிலுள்ள வரிசைப்பட்ட சோடிகளை ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் குறிப்போம்.



மேலேயுள்ள திரள் மீடிறன் வளையியைக் கொண்ட உருவிலுள்ள கிடை மற்றும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் பற்றி இப்போது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

இங்கு மொத்தத் தரவுகளின் எண்ணிக்கை 52 ஆகும். அதாவது மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை 52 ஆகும். முதலில் 52 தரவுகளின் முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் காலணைகள் அமைந்துள்ள இடங்களைக் கண்டுகொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு:
திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து காலணைகளைக் காணும்போது மேலே பகுதி 15.3 இல் போன்று வெவ்வேறு சந்தர்ப்பங்களைக் கருதி காலணைகளைக் காண்பது அவசியமற்றதாகும். அதற்கான காரணம் கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகள் பெரிய எண்ணிக்கையில் இருப்பதால் (30 இற்குக் கூடிய எண்ணிக்கை பெரிய எண்ணிக்கை என இங்கு கொள்ளப்படும்) இங்கு மீடிறன்களிலிருந்த $\frac{1}{4}$ ஆம் $\frac{1}{2}$ ஆம் $\frac{3}{4}$ ஆம் அமைவிடங்களைக் கண்டுகொள்வது போதுமானது.

முதலாம் காலணை அமைவது, மீடிறன்களை ஏறுவரிசையில் ஒழுங்கமைக்கும்போது மொத்த மீடிறன்களின் எண்ணிக்கையின் $\frac{1}{4}$ ஆவது மீடிறன் அமைந்துள்ள இடத்திலாகும். இதற்கேற்ப

Q_1 முதலாம் காலணை = $\frac{1}{4} \times 52$ ஆவது இடம் = 13 ஆவது இடம்

Q_2 இரண்டாம் காலணை = $\frac{1}{2} \times 52$ ஆவது இடம் = 26 ஆவது இடம்

Q_3 மூன்றாம் காலணை = $\frac{3}{4} \times 52$ ஆவது இடம் = 39 ஆவது இடம்

இனி மீடிறனைக் குறிக்கும் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது 13, 26, 39 ஆகிய புள்ளிகளுக்கு மீடிறன்களுக்கு ஒத்த தரவுகளைத் தேட வேண்டும். அதற்குத் தேவையான கோடுகள் மேலேயுள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ளன. உதாரணமாக முதலாம் காலணை பின்வருமாறு கண்டுகொள்ளப்படும்.

முதலாம் காலணை அமைந்துள்ள இடம் 13 என்பதால் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது 13 இலிருந்து ஒரு கிடைக்கோட்டை வரைந்து, அது வளையியை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடானது கிடை அச்சு வெட்டப்படும் வரை வரையப்படும். அவ்வெட்டுப் புள்ளிக்குரிய பெறுமானம் முதலாம் காலணை ஆகும்.

தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் இவ்வாறு காலணைகளைக் காணும்போது $Q_1 = 26$, $Q_2 = 42$, $Q_3 = 55$ பெறப்படும்.

எனவே காலணை இடைவீச்சு $= Q_3 - Q_1 = 55 - 26 = 29$

உதாரணமான கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் மொத்த மீடிறன்கள் 51 ஆயின், அப்போது முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் காலணைகளின் அமைவிடங்கள் முறையே

$\frac{1}{4} \times 51 = 12.75$ ஆம் இடம்.

$\frac{1}{2} \times 51 = 25.5$ ஆம் இடம்.

$\frac{3}{4} \times 51 = 38.25$ ஆம் இடம் என எடுக்க முடியும்.

பின்னர் நிலைக்குத்து அச்சின் மீது 12.75, 25.5, 38.25 ஆகிய பெறுமானங்களுக்கு (அல்லது உங்களது வரைபில் பயன்படுத்திய அளவிடைக்கு ஏற்ப பொருத்தமாக மட்டந்தட்டிப் பெறப்படும் பெறுமானங்களுக்கு) உரியதாக காலணைகளைக் கண்டு கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 15.5

1. ஒரு காரியாலயத்திலிருந்த பணியாளர்கள் 2015 ஆம் ஆண்டு பெற்றுக் கொண்ட விடுமுறைகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

நாட்களின் எண்ணிக்கை	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24
பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை	10	18	11	8	5	4

(i) மேற்குறித்த தகவல்களின் திரள் மீடிறன் அட்டவணையை உருவாக்குக.
(ii) அட்டவணையிலிருந்து திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iii) திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து
 (*a*) பணியாளர்களின் விடுமுறைகளின் இடையப் பெறுமானம்
 (*b*) தரவுகளின் காலணை இடைவீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு மாதாந்தப் பரீட்சையில் தரம் 11 மாணவர்கள் விஞ்ஞானப் பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய தகவல்கள் ஓர் அட்டவணையில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளன.

புள்ளிகளின் வகுப்பாயிடை	0 - 15	15 - 30	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	6	8	12	20	10	4

(i) அட்டவணையிலுள்ள தகவல்களிலிருந்து ஒரு திரள் மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(ii) திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iii) திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து

(*a*) முதலாம் காலணை
(*b*) இரண்டாம் காலணை
(*c*) மூன்றாம் காலணை
ஆகியவற்றைக் காண்க.
(iv) பெற்ற புள்ளிகளின் காலணை இடைவீச்சைக் காண்க.

3. 2015 ஜனவரி மாதத்தில் குறித்தவொரு ஆடைத்தொழிற்சாலை ஊழியர்களின் சம்பளம் தொடர்பான தகவல்கள் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இத்தகவல்களிலிருந்து தரவுகளின் திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக. திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து ஊழியர் ஒருவரின் இடையச் சம்பளத்தையும் காலணை இடை வீச்சையும் காண்க.

ஓர் ஊழியரின் மாதாந்தச் சம்பளம் (ரூ.)	20000 - 20500	20500 - 21000	21000 - 21500	21500 - 22000	22000 - 22500	22500 - 23000	23000 - 23500	23500 - 24000
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	8	10	15	18	25	12	9	7

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு வீடமைப்புத் திட்டத்திலுள்ள வீடுகளில் மின் பாவனைக்காகச் செலுத்தப்படும் மாதக்கட்டணங்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மாதக் கட்டணம் (ரூபாயில்)	0 - 200	200 - 400	400 - 600	600 - 800	800 - 1000
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	8	14	24	12	6

(i) இத்தகவல்களிலிருந்து திரள் மீடிறன் அட்டவணையொன்றைத் தயாரிக்க.
(ii) இத்தகவல்களுக்குரிய திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.
(iii) இடையத்தைக் காண்க.
(iv) காலணை இடை வீச்சைக் காண்க.

2. ஒரு காரியாலயத்தில் பணியாளர்களின் வயதுகள் பற்றித் திரட்டப்பட்ட தகவல்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்று கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

வயது (ஆண்டுகளில்)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	14	18	16	6	2	2

தரப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின்

(i) வலையுருவரையத்தை வரைக.

(ii) மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.

(iii) திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.

(iv) திரள் மீடிறன் வளையியிலிருந்து காலணையிடை வீச்சைக் காண்க.

3. 100 வீடுகளைக் கொண்ட ஒரு வீடமைப்புத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு வீட்டிலும் பாவித்த நீர் அலகுகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

நீர் அலகுகளின் எண்ணிக்கை	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	2	8	35	40	10	5

(i) இத்தகவல்களிலிருந்து வலையுரு வரையத்தையும் மீடிறன் பல்கோணியையும் வரைக.

(ii) ஒரு திரள் மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(iii) இவ்வட்டவணையிலிருந்து திரள் மீடிறன் வளையியை வரைக.

(iv) இத்தரவுகளின் காலணை இடைவீச்சைக் காண்க.

16 பெருக்கல் விருத்தி

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- எண் தொடர்களிலிருந்து பெருக்கல் விருத்தியை அறிந்துகொள்ளவும்
- ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் n ஆம் உறுப்புக்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்
- ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்கான சூத்திரத்தை பயன்படுத்தவும்
- பெருக்கல் விருத்தி தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

16.1 பெருக்கல் விருத்தி

முதலில் நாம் தரம் 10 இல் கற்ற கூட்டல் விருத்தி தொடர்பாக மீண்டும் நினைவுகூர்வோம். கீழே ஒரு கூட்டல் விருத்தி தரப்பட்டுள்ளது.

5, 7, 9, 11 ...

இங்கு எந்தவோர் உறுப்புக்கும் 2 என்னும் மாறாப் பெறுமானம் கூட்டப்பட்டு அதற்கு அடுத்துள்ள உறுப்பு பெறப்படுகின்றது. அம்மாறாப் பெறுமானம் கூட்டல் விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் என அழைக்கப்படுகின்றது.
கீழே தரப்பட்டுள்ள எண் தொடரியை நன்கு அவதானிக்கவும்.

3, 6, 12, 24, 48, 96 ...

இத்தொடரியின் முதலாம் உறுப்பு 3 ஆகும். முதலாம் உறுப்பை 2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் இரண்டாம் உறுப்பும் இரண்டாம் உறுப்பை 2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் மூன்றாம் உறுப்பும் பெறப்படுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது எந்தவோர் உறுப்பும் 2 என்னும் மாறா எண்ணினால் பெருக்கப்பட்டு அதற்கடுத்த உறுப்பு பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறான விருத்திகள் **பெருக்கல் விருத்திகள்** எனப்படும். பெருக்கிச் செல்லும் மாறா பெறுமானம் பெருக்கல் விருத்தியின் **பொது விகிதம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப, இப்பெருக்கல் விருத்தியின் பொது விகிதம் 2 ஆகும்.இவ்வாறு ஓர் எண் தொடரி தரப்பட்டுள்ளபோது அது பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சிப்பதற்குப் பின்வருமாறு செய்யலாம். இரண்டாம் உறுப்பை முதலாம் உறுப்பினால் வகுத்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறித்துக் கொள்ளவும். மூன்றாம் உறுப்பை இரண்டாம் உறுப்பினால் வகுத்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறித்துக் கொள்ளவும். நான்காம் உறுப்பை மூன்றாம் உறுப்பினால் வகுத்துப் பெறப்படும் பெறுமானத்தைக் குறித்துக் கொள்ளவும். இவ்வாறு செய்து கொண்டு செல்லும்போது ஒரே பெறுமானம் குறிக்கப்படுமாயின் அது பெருக்கல் விருத்தியாகும். அவ்வாறு பெறப்படும் பெறுமானம் **பொதுவிகிதம்** என நீங்கள் விளங்கிக் கொள்வீர்கள்.

உதாரணம் 1

2, 6, 18, 54, ... என்னும் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{18}{6} = 3, \qquad \frac{54}{18} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$$

$\therefore$ மேற்குறித்த எண் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியாகும். மேலும் அதன் பொது விகிதம் 3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

200, 100, 50, 20, ... என்னும் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

$$\frac{100}{200} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களிலும் மாறாப் பெறுமானம் பெறப்படாததால் இது ஒரு பெருக்கல் விருத்தி அல்ல.

உதாரணம் 3

5, –10, 20, –40, 80, ... என்னும் தொடரி ஒரு பெருக்கல் விருத்தியா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

$$\frac{-10}{5} = -2, \qquad \frac{20}{-10} = -2, \qquad \frac{-40}{20} = -2, \qquad \frac{80}{-40} = -2$$

$$\therefore \quad \frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \frac{80}{-40} = -2$$

$\therefore$ இவ்வெண் தொடரியானது பொதுவிகிதம் -2 ஐ உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியாகும்.

உதாரணம் 4

4, x, 16 ஆகிய மூன்று உறுப்புகளும் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாயின் x இன் பெறுமானம் காண்க.

பெருக்கல் விருத்தியில் அமைவதால் $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் மூலம் தேவையான x இன் பெறுமானம் பெறப்படும்.

$\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ எனின் $x^2 = 64$.

அதாவது $\quad x^2 - 8^2 = 0$

அதாவது $(x-8)(x+8)=0$
அதாவது $x=8$ அல்லது $x=-8$
இனி இவ்வொவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் 4, x, 16 ஆகிய மூன்று உறுப்புகளும் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அமைகின்றனவா எனப் பார்ப்போம்.

$x=8$ ஆகும்போது 4, 8, 16 என்பது பொது விகிதம் 2 ஐக் கொண்ட பெருக்கல் விருத்தியாகும்.
$x=-8$ ஆகும்போது 4, – 8, 16 என்பது பொது விகிதம் – 2 ஐக் கொண்ட பெருக்கல் விருத்தியாகும்.
∴ இவ்விரண்டு விருத்திகளும் பெருக்கல் விருத்தியில் அமைகின்றன.
∴ $x=-8$ அல்லது $x=+8$ ஆகும்.

பயிற்சி 16.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள எண் தொடரிகளிலிருந்து பெருக்கல் விருத்திகளைத் தெரிந்து எழுதுக.

(a) 2, 4, 8, ... **(b)** – 6, – 18, – 54, ... **(c)** 64, 32, 16, 8, ...

(d) 5, 10, 30, 120, ... **(e)** – 2, 6, – 18, 54, ... **(f)** 81, 27, 3, $\frac{1}{9}$, ...

(g) 0.0002, 0.002, 0.02, 0.2, ... **(h)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{72}, ...$

16.2 ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பு

முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும் பொது வித்தியாசம் d ஆகவும் உள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பை $T_n = a + (n-1)d$ என எழுதலாமென நீங்கள் தரம் 10 இல் கற்றீர்கள். ஒரு பெருக்கல் விருத்தயின் n ஆம் உறுப்பிற்கு ஒரு சூத்திரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையில் இப்போது கவனம் செலுத்துவோம்.

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பை a எனவும் அதன் பொது விகிதத்தை r எனவும் குறியீடுகளினால் எழுதுவோம். மேலும் n ஆம் உறுப்பை T_n என எழுதுவோம். ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் n இற்கான ஒரு சூத்திரத்தைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறையைக் கவனிப்போம்.

2, 6, 18, 54, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியைக் கருதுவோம். இப்பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு (a) 2 உம் பொது விகிதம் (r) 3 உம் ஆகும்.

அப்போது
$$T_1 = 2 = 2 \times 1 = 2 \times 3^{1-1}$$
$$T_2 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times 3^{2-1}$$
$$T_3 = 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{3-1}$$
$$T_4 = 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{4-1}$$

என எழுத முடியும் என்பதை நன்கு அவதானிக்கவும். அவ்வுறுப்புகளை, முதலாம் உறுப்பு (a) பொது விகிதம் (r) என்பவற்றின் சார்பில் தரும்போது

$T_1 = 2 \times 3^0 = a \times r^{1-1}$
$T_2 = 2 \times 3^1 = a \times r^{2-1}$
$T_3 = 2 \times 3^2 = a \times r^{3-1}$
$T_4 = 2 \times 3^3 = a \times r^{4-1}$ என எழுதலாம்.

இக்கோலத்திற்கேற்ப n ஆம் உறுப்பை $T_n = ar^{n-1}$ என எழுத முடியும் என்பதை அவதானிக்கவும்.

முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும் பொது விகிதம் r ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் n ஆம் உறுப்பு $T_n = ar^{n-1}$ இனால் தரப்படும்.

உதாரணம் 1

முதலாம் உறுப்பு 3 உம் பொது விகிதம் 2 உம் ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

$$a = 3,\ r = 2,\ n = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore\ T_5 &= ar^{n-1} \\ &= 3 \times 2^{5-1} \\ &= 3 \times 2^4 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 48 \end{aligned}$$

எனவே 5 ஆம் உறுப்பு 48 ஆகும்.

உதாரணம் 2

81, 27, 9, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் ஐந்தாம் உறுப்பையும் ஏழாம் உறுப்பையும் காண்க

$$a = 81$$

$$r = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ T_5 &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} \\ &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= 81 \times \frac{1}{81} \\ &= 1 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} T_7 &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} \\ &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= 81 \times \frac{1}{729} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

எனவே ஐந்தாம் உறுப்பு 1 உம் ஏழாம் உறுப்பு $\frac{1}{9}$ உம் ஆகும்.

பயிற்சி 16.2

1. முதலாம் உறுப்பு 5 உம் பொது விகிதம் 2 உம் ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

2. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு 4 உம் பொது விகிதம் – 2 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியின் 6 ஆம் உறுப்பையும் 8 ஆம் உறுப்பையும் காண்க.

3. முதலாம் உறுப்பு –2 உம் பொது விகிதம் –3 உம் ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 4 ஆம் உறுப்பையும் 7 உறுப்பையும் காண்க.

4. முதலாம் உறுப்பு 1000 உம் பொது விகிதம் $\frac{1}{5}$ உம் உடைய பெருக்கல் விருத்தியில் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

5. 0.0002, 0.002, 0.02,... என்னும் விருத்தியில் 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

6. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}$,... என்னும் விருத்தியில் 7 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

7. 75, – 30, – 12,... என்னும் விருத்தியில் 4 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

8. 192, 96, 48,... என்னும் விருத்தியில் 7 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

9. 0.6, 0.3, 0.15,... என்னும் விருத்தியில் 9 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

10. 8, 12, 18,... என்னும் விருத்தியில் 10 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

16.3 $T_n = ar^{n-1}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தல்

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு (a), பொது விகிதம் (r), n ஆம் உறுப்பு T_n, n ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களில் ஒன்றைத் தவிர மற்றைய பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளபோது அப்பெறுமானங்களை $T_n = ar^{n-1}$ என்னும் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டுத் தரப்படாத பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

இதற்காக சில உதாரணங்களைக் கவனத்தில் கொள்வோம்.

உதாரணம் 1

பொதுவிகிதம் 3 உம் 4 ஆம் உறுப்பு 54 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

$$r = 3, \; n = 4, \; T_n = 54$$
$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore\ T_4 = a \times (3)^{4-1}$$
$$\therefore\ 54 = a \times (3)^3$$
$$\therefore\ 54 = a \times 27$$
$$\therefore\ a = \frac{54}{27}$$
$$= 2$$

விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு 2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

முதலாம் உறுப்பு 5 உம் 7 ஆம் உறுப்பு 320 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் பொதுவிகிதத்தைக் கண்டு அதன் முதல் 5 உறுப்புகளையும் காண்க.

$$a = 5,\ n = 7,\ T_7 = 320$$
$$T_n = ar^{(n-1)}$$
$$T_7 = 5 \times (r)^{7-1}$$
$$\therefore\ 320 = 5 \times (r)^6$$
$$\therefore\ r^6 = \frac{320}{5}$$
$$= 64$$
$$= (+2)^6 \text{ அல்லது } (-2)^6$$
$$\therefore\ r = 2 \text{ அல்லது } -2$$

பொது விகிதத்திற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் கிடைப்பதால் மேற்குறித்த தேவைகளுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன.
$r = 2$ ஆகவுள்ள விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகள் 5, 10, 20, 40, 80 ஆகும்
$r = -2$ ஆகவுள்ள விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகள் 5, –10, 20, –40, 80 ஆகும்.

உதாரணம் 3

முதலாம் உறுப்பு 64 உம் பொதுவிகிதம் $\frac{1}{4}$ உம் ஆகவுள்ள விருத்தியில் $\frac{1}{64}$ எத்தனையாம் உறுப்பாகும்.

$$a = 64,\ n = \frac{1}{4},\ T_n = \frac{1}{64}$$
$$T_n = ar^{n-1}$$
$$ar^{(n-1)} = \frac{1}{64}$$
$$64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{64}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{64 \times 64}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{4^6}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$(n-1) = 6$$

$$n = 6 + 1$$

$$= 7$$

$\therefore \quad \frac{1}{64}$ என்பது மேற்குறித்த பெருக்கல் விருத்தியின் 7 ஆம் உறுப்பாகும்.

உதாரணம் 4

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு 160 உம் 6 ஆம் உறுப்பு 1215 உம் ஆகும். இவ்விருத்தியின் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

$$a = 160, \; T_6 = 1215, n = 6$$

$$T_n = ar^{(n-1)}$$

$$1215 = 160\,(r)^{6-1}$$

$$160r^5 = 1215$$

$$\therefore \quad r^5 = \frac{1215}{160}$$

$$= \frac{243}{32}$$

$$= \frac{3^5}{2^5}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\therefore \; r = \frac{3}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}$$

$\therefore$ விருத்தியின் பொது விகிதம் $1\frac{1}{2}$ ஆகும்.

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் யாதாயினும் இரண்டு உறுப்புகளின் பெறுமானங்கள் சூத்திரம் $T_n = ar^{n-1}$ ஐப் பயன்படுத்தி தரப்பட்டுள்ளபோது முதலாம் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காணலாம். அவ்வாறன ஓர் உதாரணத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 5

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 3 ஆம் உறுப்பு 48 உம் 6 ஆம் உறுப்பு 3072 உம் ஆகும். விருத்தியின் பொது விகிதத்தையும் முதலாம் உறுப்பையும் காண்க.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து இரண்டு சமன்பாடுகளை உருவாக்குவோம்.

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$T_3 = ar^{(3-1)}$$
$$ar^2 = 48 \text{ ——— } ①$$
$$T_6 = ar^{(6-1)}$$
$$ar^5 = 3072 \text{ ——— } ②$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளில் a, r ஆகிய இரண்டு மாறிகளும் உள்ளன. அதிலிருந்து மாறி a ஐ நீக்குதல் இலகுவானதாகும். அதற்காக இரண்டு சமன்பாடுகளையும் வகுப்போம்.

② ÷ ① $$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{3072}{48}$$
$$r^3 = 64$$
$$r^3 = 4^3$$
$$r = 4$$

$r = 4$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$ar^2 = 48$$
$$a(4)^2 = 48$$
$$16a = 48$$
$$a = \frac{48}{16}$$
$$a = 3$$

விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு $= 3$ உம்
பொது விகிதம் $= 4$ உம் ஆகும்.

உதாரணம் 6

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 6 ஆம் உறுப்பு -8 உம் 10 ஆம் உறுப்பு -128 உம் ஆகும்.

(i) இப்பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

(ii) ஒவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

(i) $$T_n = ar^{(n-1)}$$
$$T_6 = ar^{(6-1)}$$
$$ar^5 = -8 \text{ ——— } ①$$
$$T_{10} = ar^{(10-1)}$$
$$ar^9 = -128 \text{ ——— } ②$$

② ÷ ①

$$\frac{ar^9}{ar^5} = \frac{-128}{-8}$$

$$r^4 = 16$$

$r^4 = 2^4$ அல்லது $(-2)^4$

$r = 2$ அல்லது -2

பொது விகிதத்திற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் கிடைப்பதால் இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன.

(ii) $r = 2$, ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$ar^5 = -8$$

$$a(2)^5 = -8$$

$$a \times 32 = -8$$

$$a = \frac{-8}{32}$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$r = 2$, $a = -\frac{1}{4}$ ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளும் $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, -1, -2, -4 ஆகும்.

$r = -2$ ஐ ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$ar^5 = -8$$

$$a(-2)^5 = -8$$

$$a \times (-32) = -8$$

$$a = \frac{-8}{-32}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$r = -2$, $a = \frac{1}{4}$ ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளும் $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, 1, -2, 4 ஆகும்.

பயிற்சி 16.3

1. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் பொது விகிதம் 3 உம் 4 ஆம் உறுப்பு 108 உம் ஆகும். விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

2. 6 ஆம் உறுப்பு 1701 உம் பொது விகிதம் 3 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

3. பொது விகிதம் $\frac{1}{2}$ உம் 8 ஆம் உறுப்பு 96 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

4. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் உறுப்பு 5 உம் 4 ஆம் உறுப்பு 135 உம் ஆகும். விருத்தியின் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

5. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் உறுப்பு 7 உம் பொதுவிகிதம் 2 உம் ஆகும். 448 இவ்விருத்தியின் எத்தனையாம் உறுப்பாகும்.

6. முதலாம் உறுப்பு $\frac{1}{32}$ உம் பொது விகிதம் 2 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 256 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?

7. முதலாம் உறுப்பு 27 உம் பொது விகிதம் $\frac{2}{3}$ உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் $3\frac{5}{9}$ எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?

8. முதலாம் உறுப்பு 8 உம் 6 ஆம் உறுப்பு – 256 உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

9. முதலாம் உறுப்பு 64 உம் 9 ஆம் உறுப்பு $\frac{1}{4}$ உம் உடைய இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டி அவ்வொவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.

10. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 4 உம் உறுப்பு 48 உம் 7 ஆம் உறுப்பு 384 உம் ஆகும். விருத்தியின் பொது விகிதத்தையும் முதலாம் உறுப்பையும் காண்க.

11. 3 ஆம் உறுப்பு –45 உம் ஐந்தாம் உறுப்பு –1125 உம் உடைய இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

12. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் 4 ஆம் உறுப்பு 100 உம் 9 ஆம் உறுப்பு $3\frac{1}{8}$ உம் ஆகும். விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

13. ஐந்தாம் உறுப்பு 40 உம் 9 ஆம் உறுப்பு 640 உம் உடைய இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டி, ஒவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் 5 உறுப்புகளை எழுதுக.

16.4 ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

முதலாம் உறுப்பு a உம் பொது விகிதம் r உம் உடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n இற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்கும் முறைபற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

$$T_1 = a,\ T_2 = ar,\ T_3 = ar^2,\ T_4 = ar^3,\ ....,\ T_n = ar^{(n-1)}$$

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_n$$

$\therefore\ S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{(n-1)}$ ——— ① என எழுத முடியும்.

S_n இற்கான சூத்திரத்தை உருவாக்கும்போது பயன்படுத்தப்படும் வழிமுறை பின்வருமாறாகும். முதலில் சமன்பாடு ① இன் இருபக்கங்களையும் r இனால் பெருக்குவோம். அப்போது

$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n \quad \text{——— ②}$$ என்பது கிடைக்கும்.

இனி, சமன்பாடு ② இலிருந்து சமன்பாடு ① ஐக் கழிப்போம். அப்போது

$r\ S_n - S_n = ar^n - a$ (வலது கைப் பக்கத்தில் எஞ்சிய உறுப்புகள் கழிக்கப்பட்டு விடுகின்றன என்பதை அவதானிக்க.)

$$S_n (r - 1) = a (r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a (r^n - 1)}{(r - 1)} \qquad (r \neq 1)$$

இது a, r, n, S_n ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள ஒரு சூத்திரமாகும். இச்சூத்திரத்தின் பகுதியையும் தொகுதியையும் -1 இனால் பெருக்குவதன் மூலம் சூத்திரத்தை வேறொரு வடிவில் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$S_n = \frac{a (1 - r^n)}{(1 - r)}$$

S_n இற்கு $S_n = \dfrac{a (r^n - 1)}{(r - 1)}$, $S_n = \dfrac{a (1 - r^n)}{(1 - r)}$ ஆகிய

இரண்டு சந்தர்ப்பங்களில் எந்தவொன்றையும் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

2, 6, 18, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை, உறுப்புகளைக் கண்டு கூட்டுவதன் மூலமும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலமும் வேறுவேறாகக் காண்க.

முதலில் உறுப்புகளைக் கண்டு கூட்டி கூட்டுத்தொகையைக் கணிப்போம்.

$T_1 = 2,\ T_2 = 6\ ,\ T_3 = 18$ எனத் தரப்பட்டுள்ளன.

மேலும்.

$T_4 = 18 \times 3 = 54$ உம்

$T_5 = 54 \times 3 = 162$ உம் ஆகும்.

எனவே $S_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$= 2 + 6 + 18 + 54 + 162$

$= 242$

இனி $S_n = \dfrac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கூட்டுத்தொகையைக் காண்போம்.

$a = 2,\ r = \dfrac{6}{2} = 3,\ n = 5$ என்பதால்,

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{2\,(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_n = \frac{2\,(243 - 1)}{2}$$

$$S_n = \frac{2 \times 242}{2}$$

$$S_n = 242$$

முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 242 ஆகும்.

உறுப்புகளின் பெறுமானங்கள் பெரியனவாக உள்ளபோது அல்லது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பெரியதாக உள்ளபோது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது மிக இலகுவானதாகும்.

உதாரணம் 2

120, – 60, 30, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. அதற்காக சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$a = 120,\ r = \dfrac{-60}{120} = -\dfrac{1}{2},\ n = 6$ என்பதால்

$S_6 = \dfrac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$ இல் பிரதியிடுவதால்

$$S_6 = \frac{120\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_6 = \frac{120\left[1 - \left(\frac{1}{64}\right)\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$S_6 = \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \div \frac{3}{2}$$

$$S_6 = \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \times \frac{2}{3}$$

$$S_6 = \frac{315}{4}$$

$$S_6 = 78\frac{3}{4}$$

முதல் ஆறு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $78\frac{3}{4}$ ஆகும்.

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ சூத்திரத்தில் நான்கு மாறிகள் உள்ளன. அவை a, r, n, S_n என்பவையாகும். இம்மாறிகளில் ஏதேனும் மூன்று தரப்படும்போது எஞ்சிய பெறுமானத்தைக் காணலாம். இனி, அவ்வாறான ஓர் உதாரணத்தை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

5, 15, 45,... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் உறுப்பிலிருந்து கூட்டுத்தொகை 1820 ஆவதற்கு கூட்டப்பட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

$$a = 5,\ r = \frac{15}{5} = 3,\ S_n = 1820$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$1820 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$1820 = \frac{5(3^n - 1)}{2}$$

$$2 \times 1820 = 5(3^n - 1)$$

$$\frac{2 \times 1820}{5} = 3^n - 1$$

$$728 = 3^n - 1$$

$$1 + 728 = 3^n$$

$$729 = 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

$$n = 6$$

கூட்டப்பட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 6 ஆகும்.

பயிற்சி 16.4

1. முதல் உறுப்பு 4, பொது விகிதம் 3 ஆகவுள்ள ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை, உறுப்புகளைக் கண்டு கூட்டுவதன் மூலமும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் காண்க.

2. 2, 8, 32, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 5 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

3. முதலாம் உறுப்பு 72 உம் பொது விகிதம் $\frac{1}{3}$ உம் உள்ள பெருக்கல் விருத்தியில் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

4. 3, – 6, 12, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 7 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

5. 18, 12, 8, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

6. 18, 6, 2, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $26\frac{26}{27}$ எனக் காட்டுக.

7. 2, 4, 8, ... என்னும் பெருக்கல் விருத்தியில் குறித்த முதல் உறுப்புகள் சிலவற்றின் கூட்டுத்தொகை 2046 ஆயின் அவ்வுறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

8. முதலாம் உறுப்பு 4 உம் பொதுவிகிதம் 2 உம் ஆகவுள்ள பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 1020 ஆவதற்கு கூட்டப்பட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

9. 3, – 12, 48 என்னும் பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 9831 ஆவதற்கு கூட்டவேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

16.5 பெருக்கல் விருத்தி தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

பெருக்கல் விருத்தி தொடர்பாக மேற்குறித்த உதாரணங்களின் மூலம் கலந்துரையாடாத வகையிலான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் முறையை சில உதாரணங்களின் மூலம் இப்போது கவனிப்போம்.

உதாரணம் 1

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் முதலாம் இரண்டாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 9 ஆகும். 4 ஆம் 5 ஆம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை – 72 ஆகும். விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளை எழுதுக.

$$T_1 = a,\ T_2 = ar$$

$$a + ar = 9$$

$$a(1 + r) = 9 \quad \text{①}$$

$$T_4 = ar^3,\ T_5 = ar^4$$

$$ar^3 + ar^4 = -72$$

$$ar^3(1 + r) = -72 \quad \text{②}$$

② ÷ ①
$$\frac{ar^3(1 + r)}{a(1 + r)} = \frac{-72}{9}$$

$$r^3 = -8$$

$$r^3 = (-2)^3$$

$$r = -2$$

$r = -2$, ① இல் பிரதியிடுவதால்

$$a[1 + (-2)] = 9$$

$$a \times (-1) = 9$$

$$a = -9$$

விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளும் –9, 18, –36, 72, –144 ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் மூன்று உறுப்புகளும் முறையே $(x + 2)$, $(x + 12)$, $(x + 42)$ ஆகும். பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

$$r = \frac{x + 12}{x + 2} = \frac{x + 42}{x + 12}$$

$$\frac{x + 12}{x + 2} = \frac{x + 42}{x + 12}$$

$$(x + 12)(x + 12) = (x + 2)(x + 42)$$

$$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 44x + 84$$

$$144 - 84 = 20x$$

$$60 = 20x$$

$$x = \frac{60}{20}$$

$$x = 3$$

விருத்தியின் முதல் மூன்று உறுப்புகள்

(3 + 2), (3 + 12), (3 + 42)

5, 15, 45

விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு $= 5$

விருத்தியின் பொது விகிதம் $= \frac{45}{15}$

$= 3$

பயிற்சி 16.5

1. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் இரண்டாம், மூன்றாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 21 உம் ஐந்தாம் ஆறாம் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 168 உம் ஆகும். விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

2. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் மூன்று உறுப்புகளும் முறையே 4, $(x + 3)$, $(x + 27)$ ஆகும்.

(i) x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டி ஒவ்வொரு விருத்தியினதும் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

3. ஒரு விருத்தியின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $4(3^n - 1)$ ஆகும்.

(i) விருத்தியானது ஒரு பெருக்கல் விருத்தி எனக் காட்டுக.

(ii) அதன் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

4. ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் முதலாம், மூன்றாம், ஆறாம் உறுப்புகள் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 3 உறுப்புகளாகும். கூட்டல் விருத்தியின் 5 ஆம் உறுப்பு 15 ஆயின், பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

5. ஒரு விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பு $3(2)^{n+1}$ ஆகும்.

(i) விருத்தியானது ஒரு பெருக்கல் விருத்தி எனக் காட்டுக.

(ii) விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பையும் பொது விகிதத்தையும் காண்க.

6. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலாம் உறுப்பு 9 ஆகும். முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 7 ஆகும்.

(i) இப்பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான இரண்டு பெருக்கல் விருத்திகள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

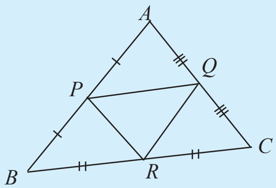
(ii) ஒவ்வொரு விருத்தியிலும் முதல் 4 உறுப்புகளையும் எழுதுக.

மீட்டற் பயிற்சி - 2

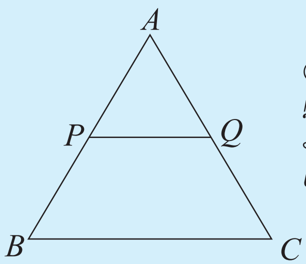
பகுதி I

1. 5, 3, 7, 13, 11, 9, 7, 10, 2, 3, 7 என்னும் கூட்டத்தின்

(i) ஆகாரம் (ii) இடையம் (iii) இடை (iv) காலணை இடைவீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.



2. முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 24 cm ஆயின் முக்கோணி PQR இன் சுற்றளவு யாது?



3. முக்கோணி ABC இல் AB, AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q உம் ஆகும். முக்கோணி APQ இன் சுற்றளவு 21 cm எனின், முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவு யாது?

4. பங்குச் சந்தையில் கொடுக்கல்வாங்கல் செய்யும் ஒருவர், குறித்த ஒரு நிறுவனத்தின் பங்குகளை பங்கொன்றின் சந்தை விலை ரூ. 50 ஆக உள்ளபோது வாங்கினார். பின்னர் அப்பங்கொன்றின் விலை ரூ. 58 ஆகும்போது அவர் அப்பங்குகளை விற்றார். இப்பங்கு கொடுக்கல் வாங்கலில் முதலீட்டாளர் பெற்ற இலாபத்தை மூலதன இலாபச் சதவீதமாகக் காட்டுக.

5. வரதன் உடன் காசுக்கு ரூ. 15 000 ஆகவுள்ள ஒரு பொருளை முதலில் 3000 செலுத்தி குறைந்து செல்லும் நிலுவை முறையில் வாங்கினார். எஞ்சிய பணத்தை மாதமொன்றுக்கு ரூ. 1464 வீதமான சமனான 10 மாதத் தவணைகளில் செலுத்தி கடனிலிருந்து மீண்டார். பொருளுக்குச் செலுத்தப்பட்டுள்ள மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

6. $x^2 - ax + 18 = 10$ இன் ஒரு மூலம் $x = 2$ ஆயின்,

(i) a இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) சமன்பாட்டின் மற்றைய மூலத்தைக் காண்க.

7. $(x-2)^2 = x-2$ ஆயின் x இன் தீர்வுகளைக் காண்க.

8. தீர்க்க. $3x^2 - 27 = 0$

9. அடுத்துள்ள இரண்டு நேர் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 145 ஆகும். அவ்விரண்டு எண்களையும் காண்க.

10. $y = x^2 + 6x + 5$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரையாது
(i) சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு
(ii) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்
ஆகியவற்றைக் காண்க.

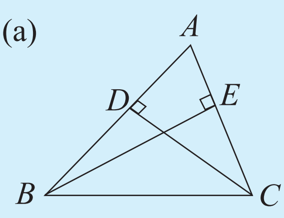
11. $y = (x-2)(x+1)$ என்னும் சார்பானது x அச்சை இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

12. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$, $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ ஆயின் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

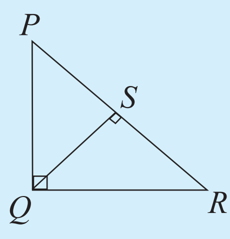
13. $T_n = 2 \times 3^n$ என்பதின் மூலம் காட்டப்படுவது எவ்வகையான தொடர் என்பதை காரணங்களுடன் காட்டுக.

14. முக்கோணி ABC இல் $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 4$ cm ஆகும். X என்பது பக்கம் BC யின் மீது அமைந்துள்ள நிலையான ஒரு புள்ளி ஆகும். AX இன் நடுப்புள்ளி P ஆயின் P இன் ஒழுக்கை விபரிக்க.

15. (a)



(b)



உருவிற்கேற்ப
(i) இல் ABE, ADC ஆகிய முக்கோணிச் சோடி
(ii) இல் PQS, QSR ஆகிய முக்கோணிச் சோடி
இயல்பொத்தவை எனக் காட்டுக.

பகுதி II

1. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 6 அலகுகளினால் குறைத்து, அகலத்தை 2 அலகுகளினால் அதிகரித்தபோது அதன் பரப்பளவு முன்னைய பரப்பளவிலும் 12 சதுர அலகுகளினால் குறைகிறது. செவ்வகத்தின் முன்னைய நீளம், அகலம் ஆகியவற்றை முறையே x, y அலகுகள் எனக் கொண்டு

   (i) இரண்டாம் செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் ஆகியவற்றை x, y என்பவற்றின் சார்பில் தருக.
   (ii) இரண்டாம் செவ்வகத்தின் பரப்பளவை x, y என்பவற்றின் சார்பில் தருக.
   (iii) x, y ஆகியவற்றிலான ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்குக.
   (iv) முன்னைய செவ்வகத்தின் நீளமானது அதன் அகலத்தின் மூன்று மடங்கு எனக் காட்டுக.
   (v) முன்னைய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 192 சதுரஅலகுகள் எனின், அதன் நீளம், அகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. பொதுவிகிதம் நேர்பெறுமானமாகவுடைய ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில், மூன்றாம் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பிலும் 3 கூடியது. ஐந்தாம் உறுப்பு நான்காம் உறுப்பிலும் 12 கூடியதும் ஆகும்.
   (i) விருத்தியின் பொதுவிகிதம், முதலாம் உறுப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.
   (ii) விருத்தியின் முதல் 5 உறுப்புகளையும் எழுதுக.
   (iii) விருத்தியின் n ஆம் உறுப்பு $3 \times 2^{n-2}$ எனக் காட்டுக.

3. பங்குசந்தையில் பணத்தை முதலீடு செய்யும் ஒருவர், பங்கிலாபமாக வருடாந்தம் ஒரு பங்குக்கு ரூ. 1.25 வீதம் வழங்கும் A என்னும் நிறுவனத்தில் 5000 பங்குகளை வாங்கவும் வருடாந்தம் ஒரு பங்குக்கு ரூ. 1.50 வீதம் வழங்கும் B என்னும் நிறுவனத்தில் குறித்த ஒரு தொகைப் பங்குகள் வாங்கவும் பணத்தை முதலீடு செய்கின்றார். A, B ஆகிய நிறுவனங்களின் பங்குகளின் சந்தை விலை முறையே ரூ. 30, ரூ. 35 ஆகவுள்ள ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் அவருக்கிருந்த அந்நிறுவனங்களின் சகல பங்குகளையும் விற்று ஒரு பங்குக்கு ரூ. 2.50 வீதம் வழங்கும் C என்னும் நிறுவனத்தில் பங்குகளை ரூ. 50 வீதம் வாங்கினார் அதன் மூலம் அவரது பங்கிலாப வருமானம் ரூ. 12 750 ஆகியது.

   (i) நிறுவனம் B யில் அவருக்கிருந்த பங்குளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (ii) புதிய முதலீட்டின் மூலம் அவரது வருடாந்த பங்கிலாப வருமானம் ரூ. 2000 இனால் அதிகரித்துள்ளது எனக் காட்டுக.

4. ஒருவர் 8% வருட தொடர் வட்டி வீதத்தில் இரண்டு ஆண்டுகளில் செலுத்தி முடிக்கும் ஒப்பந்தத்தில் ரூ. 10 000 கடனாகப் பெற்றார். ஆயினும் அவரால் இரண்டு ஆண்டுகளின் முடிவில் ஒப்பந்தக் கடனைச் செலுத்தி முடிக்க முடியாமற் போனது. கடன் வழங்குனருக்கு இரண்டு ஆண்டுகளின் முடிவில் ரூ. 6 000 ஐ செலுத்திய அவர் மேலும் ஓர் ஆண்டில் வட்டியுடன் கடனை செலுத்தி முடிக்கவும் ஒப்பந்தம் செய்த வட்டியிலும் கூடிய வட்டியை அவ்வாண்டுக்கு செலுத்தவும் கடன் வழங்குனரை உடன்படச் செய்தார்.

(i) முதலாம் ஆண்டு முடிவில் அவர் செலுத்த வேண்டிய வட்டியைக் கணிக்க.

(ii) இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில் கடனிலிருந்து மீள்வதற்குச் செலுத்திய மொத்தப் பணத்தைக் காண்க.

(iii) மூன்றாம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் செலுத்த எஞ்சியிருக்கும் பணம் யாது?

(iv) மூன்றாம் ஆண்டு முடிவில் ஒப்பந்தப்படி 6230.40 செலுத்திக் கடனிலிருந்து மீண்டாரெனின் மூன்றாம் வருடம் செலுத்தியுள்ள வட்டி வீதத்தைக் காண்க.

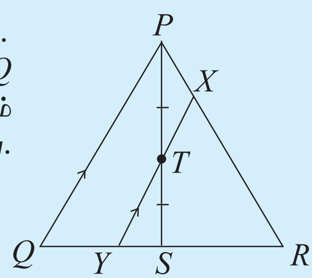
5. இணைகரம் $ABCD$ இல் AC இற்குச் சமாந்தரமாக B இனூடாக வரையப்பட்ட கோடானது நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC ஐ E இல் சந்திக்கின்றது. AE, BC ஆகிய கோடுகள் P இலும் AC, BD ஆகிய மூலை விட்டங்கள் Q விலும் இடைவெட்டுகின்றன.

(i) மேற்குறித்த தகவல்களை உள்ளடக்கிய பருமட்டான ஒரு படம் வரைக.

(ii) $ABEC$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

(iii) $PQ = \frac{1}{4} DE$ என நிறுவுக.

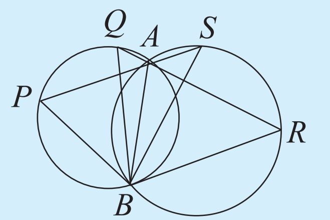
6. முக்கோணி PQR இல் பக்கம் QR இன் நடுப்புள்ளி S ஆகும். PS இன் நடுப்புள்ளி T ஆவதுடன் T இனூடாக PQ இற்கு சமாந்தரமாக வரையப்பட்ட கோடானது பக்கம் PR ஐ X இலும் பக்கம் QR ஐ Y இலும் சந்திக்கின்றது.



(i) $YT = \frac{1}{2} PQ$ என நிறுவுக.

(ii) $XY = \frac{3}{4} PQ$ என நிறுவுக.

7. (a) தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

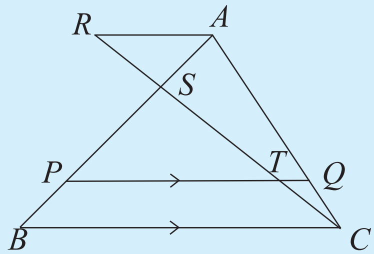


(i) $A\hat{P}B$ யிற்கு சமனான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(ii) ΔBPS, ΔBQR ஆகியன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் என நிறுவுக.

(iii) $BP : BQ = BS : BR$ என நிறுவுக.

(b) தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப



(i) $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AQ}{AC}$ என நிறுவுக.

(ii) $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{RT}{RC}$ என நிறுவுக.

8. (i) $y = x(x-2)$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவதற்காக $-3 \leq x \leq 5$ என்னும் வீச்சில் ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

(ii) x, y ஆகிய பெறுமானங்களுக்குப் பொருத்தமான ஓர் அளவிடையை எடுத்து $y = x(x-2)$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) வரைபிலிருந்து

(a) வரைபின் சமச்சீர் அச்சின் சமன்பாடு

(b) சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம்

(c) சார்பின் பெறுமானம் 0 ஆகும் x இன் பெறுமானங்கள்.

(d) $x(x-2) = 0$ இன் மூலகங்கள்

(e) சார்பு மறையாகும் x இன் பெறுமான ஆயிடை ஆகியவற்றை எழுதுக.

கலைச் சொற்கள்

அடுத்துள்ள உறுப்பு	පෙර පදය	Preceding Term
அடுத்துள்ள உறுப்புகள்	පසු පදය	Successive Terms
ஆட்சி	වසම	Domain
இருபடிச் சமன்பாடு	වර්ගජ සමීකරණ	Quadratic Equation
எண் தொடரி	සංඛ්‍යා අනුක්‍රම	Number Sequence
ஏறிகள்	අනුමේය	Rider
ஒருங்கமைச் சமன்பாடு	සමගාමී සමීකරණ	Simultaneous equations
குணகம்	සංගුණකය	Coefficient
குறைந்த பெறுமானம்	අවම අගය	Minimum value
குறைந்து செல்லும் மீதி	හීනවන ශේෂය	Reducing Balance
கூட்டு வட்டி	වැල් පොලිය	Compound Interest
கூடிய பெறுமானம்	උපරිම අගය	Maximum value
சமச்சீர் அச்சு	සමමිති අක්ෂය	Axis of symmetry
சார்பு	ශ්‍රිතය	Function
தரவு	දත්ත	Data
தவணைகள்	වාරිකය	Instalment
திரள் மீடிறன்	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය	Cumulative Frequency
திரள் மீடிறன் வரைபு	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වක්‍රය	Cumulative Frequency
திரும்பற் புள்ளி	හැරුම් ලක්ෂ්‍යය	Turning point
தீர்வுகள்	විසඳුම	Solutions
தொடரான தரவுகள்	සන්තතික දත්ත	Continuous data
தெரியாக் கணியம்	අඥාතය	Unknown
நடுப்புள்ளி	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය	Mid point
நிறுவல்	සාධනය	Proof
பின்னமான தரவுகள்	විවික්ත දත්ත	Discrete data
பெருக்கல் விருத்தி	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී	Geometric progression
பொது விகிதம்	පොදු අනුපාතය	Common Ratio
மறுதலை	විලෝමය	Converse

மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை	මාස ඒකක ගණන	Number of month units
மீடிறன்	සංඛ්‍යාතය	Frequency
மீடிறன் பல்கோணி	සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය	Frequency polygon
முதலாம் உறுப்பு	පළමුවන පදය	First Term
வகுப்பின் பருமன்	පන්තියක තරම	Class width
வகுப்பு வரைப்புகள்	පන්ති මායිම්	Class Boundaries
வகுப்பாயிடை	පන්ති ප්‍රාන්තර	Class intervals
வகுப்பு எல்லைகள்	පන්ති සීමා	Class Limits
வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல்	වර්ග පූර්ණය	Completing the Square
வலையுரு வரையம்	ජාල රේඛය	Histogram
வாய்ப்புப் பார்த்தல்	සත්‍යාපනය	Verification
விகித சமன்	සමානුපාතික	Proportional
வீச்சு	පරාසය / ප්‍රාන්තරය	Range

பாடத்திட்டம்

உள்ளடக்கம்	தேர்ச்சி மட்டம்
முதலாம் தவணை	
1. மெய்யெண்கள்	10
2. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் I	08
3. சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் II	06
4. திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு	05
5. திண்மங்களின் கனவளவு	05
6. ஈருறுப்புக் கோவைகள்	04
7. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	04
8. சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள தளவுருவங்களின் பரப்பளவு	12
இரண்டாம் தவணை	
09. சதவீதம்	06
10. பங்குச் சந்தை	05
11. நடுப்புள்ளித் தேற்றம்	05
12. வரைபுகள்	12
13. சமன்பாடுகள்	10
14. இயல்பொத்த முக்கோணிகள்	12
15. தரவுகளை வகைகுறித்தல்	12
16. பெருக்கல் விருத்தி	06
மூன்றாம் தவணை	
17. பைதகரஸ் தேற்றம்	04
18. திரிகோண கணிதம்	12
19. தாயங்கள்	08
20. சமனிலிகள்	06
21. வட்ட நாற்பக்கல்	10
22. தொடலிகள்	10
23. அமைப்புகள்	05
24. தொடைகள்	06
25. நிகழ்தகவு	07